# Aufgabenserie für Klasse 11/12 zum Auswahlseminar des BK Leipzig zur Qualifikation für die Teilnahme an der 3. Stufe der 65. Mathematikolympiade

## Vorbemerkungen

Dem Bezirkskomitee Leipzig zur Förderung mathematisch-naturwissenschaftlich begabter und interessierter Schülerinnen und Schüler stehen für die in den Klassenstufen 9 – 12 sachenweit zentral ausgerichtete 3. Stufe der Mathematikolympiade (MO) maximal 22 Plätze zur Verfügung. Die Entscheidung über die Zusammensetzung der Leipziger Mannschaft fällt auf einem Auswahlseminar auf der Basis der Ergebnisse der 2. Stufe sowie der Auswahlklausur. Neben der weiteren Qualifizierung unserer Kandidaten soll damit auch die Vergleichbarkeit und Transparenz im Auswahlverfahren verbessert werden.

Sie haben sich durch Ihren Erfolg bei der zweiten Stufe der MO für diese Auswahlklausur qualifiziert, die während des **Auswahlseminars am 24. 1. 2026** geschrieben wird.

Zur Vorbereitung auf die Klausur schicken wir Ihnen heute zusammen mit der Einladung zum Auswahlseminar eine Hausaufgabenserie. Es können 30 Punkte erreicht werden. Ihre Lösungen senden Sie bitte **bis zum 16. 1. 2026** an

**Dr. Christoph Schulze, Kurt-Frölich-Straße 7, 01219 Dresden.**

Alternativ senden Sie bitte Ihre Dateien im pdf-Format (kleiner als 12MB) an `schulze.christoph@t-online.de`.

## Die Aufgaben

> Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen ist deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzustellen. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es, sie als bekannten Sachverhalt ohne Beweisangabe anzuführen.

**Aufgabe 1**: (6 Punkte)

Wir färben die nicht-negativen ganzen Zahlen mit den Farben rot und blau derart, dass sich unter einer beliebigen Teilmenge aufeinanderfolgender Zahlen die Anzahlen der roten und blauen Zahlen um höchstens 2025 unterscheiden.

Man beweise, dass es eine Teilmenge von 2026 aufeinanderfolgenden Zahlen gibt, welche gleiche viele rote und blaue Zahlen enthält.

**Aufgabe 2**: (6 Punkte)

Seien $a, b, c$ nicht-negative reelle Zahlen mit $a + b + c = 3$. Man beweise, dass stets

$$\frac{a+b}{c+2} + \frac{b+c}{a+2} + \frac{c+a}{b+2} \geq 2.$$

**Aufgabe 3**: (6 Punkte)

In einem Dreieck $ABC$ schneide die Winkelhalbierende des Winkels bei $A$ die Seite $\overline{BC}$ in einem Punkt $D$. Die Mittelsenkrechte von $\overline{AD}$ schneide den Umkreis von Dreieck $ABC$ in den zwei Punkten $E$ und $F$. Man zeige, dass $BC$ den Umkreis vom Dreieck $DEF$ berührt.

**Aufgabe 4**: (6 Punkte)

Für jede positive ganze Zahl $n$ sei $a_n$ definiert durch

$$a_n = \frac{1}{n}\sqrt[3]{n^3 + n^2 - n - 1}.$$

Ermitteln Sie die kleinste natürliche Zahl $k$ mit $a_2 \cdot a_3 \cdots a_k > 4$.

**Aufgabe 5**: (6 Punkte)

Für natürliche Zahlen $n \geq 2$ sei $G(n)$ die größte Primzahl, welche ein Teiler von $n$ ist. Man zeige, dass es unendlich viele Zahlen $n \geq 2$ mit $G(n) < G(n+1) < G(n+2)$ gibt.