Klausur für den Auswahlwettbewerb des BK Leipzig zur Qualifikation für die Teilnahme an der 3. Stufe der 65. Mathematik-Olympiade

Klasse 11/12

Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.

Aufgabe 1: (7 Punkte)
Man zeige, dass es keine positiven ganzen Zahlen m und n gibt, welche die Gleichung

$$\frac{m}{n} + \frac{n+1}{m} = 4$$

erfüllen.

Aufgabe 2: (7 Punkte)
Sei $ABCD$ ein Trapez mit zueinander parallelen Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$, welches einen Umkreis k besitzt. Wir bezeichnen den Diagonalenschnittpunkt von $ABCD$ mit E und den Schnittpunkt der beiden Tangenten an k, welche den Kreis in B beziehungsweise C berühren, mit F. Man zeige, dass die Geraden EF und AB zueinander parallel sind.

Aufgabe 3: (6 Punkte)
Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine nicht-konstante Funktion. Man zeige, dass es $x, y \in \mathbb{R}$ mit $f(x+y) < f(x \cdot y)$ gibt.