Aufgabenserie für Klasse 9/10
zum Auswahlseminar des BK Leipzig
zur Qualifikation für die Teilnahme
an der 3. Stufe der 64. Mathematikolympiade

Vorbemerkungen

Dem Bezirkskomitee Leipzig zur Förderung mathematisch-naturwissenschaftlich begabter und interessierter Schülerinnen und Schüler stehen für die in den Klassenstufen 9 – 12 sachenweit zentral ausgerichtete 3. Stufe der Mathematikolympiade (MO) maximal 22 Plätze zur Verfügung. Die Entscheidung über die Zusammensetzung der Leipziger Mannschaft fällt auf einem Auswahlseminar auf der Basis der Ergebnisse der 2. Stufe sowie der Auswahlklausur. Neben der weiteren Qualifizierung unserer Kandidaten soll damit auch die Vergleichbarkeit und Transparenz im Auswahlverfahren verbessert werden.

Sie haben sich durch Ihren Erfolg bei der zweiten Stufe der MO für diese Auswahlklausur qualifiziert, die während des **Auswahlseminars am 18. 1. 2025** geschrieben wird.

Zur Vorbereitung auf die Klausur schicken wir Ihnen heute zusammen mit der Einladung zum Auswahlseminar eine Hausaufgabenserie. Die angegebene Punktzahl entspricht dem Schwierigkeitsgrad der Aufgabe. Es können 40 Punkte erreicht werden. Lösungen können Sie **bis zum 10. 1. 2025** an

Dr. A. Schüler, Hauptmannstraße 3, 04109 Leipzig

schicken. Alternativ senden Sie pdf-Dateien, kleiner als 12MB, an `schueler@math.uni-leipzig.de`.

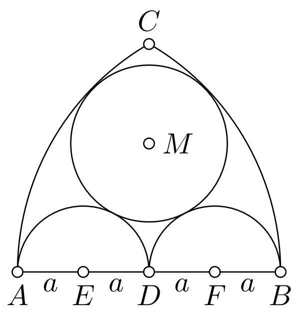
Die Aufgaben

> Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen ist deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzustellen. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es, sie als bekannten Sachverhalt ohne Beweisangabe anzuführen.

Aufgabe 1: (6 Punkte)

Untersuchen Sie, ob es natürliche Zahlen n mit der folgenden Eigenschaft gibt: Sowohl die Quersumme von n als auch die Quersumme des unmittelbaren Nachfolgers $(n+1)$ sind durch 11 teilbar.

Wenn es solche Zahlen gibt, so ist die kleinste natürliche Zahl mit dieser Eigenschaft anzugeben.



Aufgabe 2: (6 Punkte)
Im nebenstehenden Bild mögen sich die Kreise k_1 um A bzw. k_2 um B mit dem Radius $|AB| = 4\,a$ im Punkt C schneiden. Es sei D der Mittelpunkt von $\overline{AB}$ und k_3 und k_4 die Halbkreise über den Durchmessern $\overline{AD}$ bzw. $\overline{DB}$, die in derselben Halbebene liegen wie C. Schließlich sei k_5 der Kreis mit dem Mittelpunkt M und dem Radius r, der k_1 und k_2 von innen und k_3 und k_4 von außen berührt.
Berechnen Sie r in Abhängigkeit von a.

Aufgabe 3: (6 Punkte)

Zeigen Sie: Wenn die Summe dreier Kubikzahlen durch 7 teilbar ist, so ist auch ihr Produkt durch 7 teilbar.

Aufgabe 4: (6 Punkte)

Ermitteln Sie alle nichtnegativen reellen Lösungen $x, y, z \geq 0$ des folgenden Gleichungssystems

$$\begin{aligned}(x+y)(y+z) &= 4\,x\,y\\ (y+z)(z+x) &= 4\,y\,z\\ (z+x)(x+y) &= 4\,z\,x.\end{aligned}$$

Aufgabe 5: (6 Punkte)

Im rechtwinkligen Dreieck ABC mit dem rechten Winkel bei C gelte für die Seitenlängen (mit den üblichen Bezeichnungen) $c = 3$ und $a + b = \sqrt{17}$.

Bestimmen Sie daraus den Flächeninhalt F und der Radius r des Inkreises des Dreiecks.

Aufgabe 6: (10 Punkte)

a) In wie viele Teile wird die Ebene durch drei, vier bzw. fünf Geraden in beliebiger Lage höchstens geteilt? In wie viele Teile wird der dreidimensionale Raum durch die 6 Ebenen geteilt, die durch die Seitenflächen eines Würfels gegeben sind?
b) In wie viele Teile a_n wird die Ebene durch n Geraden in beliebiger Lage höchstens geteilt? Wie erhält man a_n durch Hinzunahme einer n-ten Geraden aus a_{n-1}? Finden Sie eine explizite Formel für a_n, die nur von n abhängt.
c) In wie viele Teile b_n wird der dreidimensionale Raum durch n Ebenen in beliebiger Lage höchstens geteilt? Wie viele Raumteile entstehen neu, wenn man zu den b_{n-1} Raumteilen, die durch $n-1$ Ebenen gebildet werden eine n-te Ebene hinzufügt? Finden Sie eine explizite Formel für b_n.