Aufgabenserie für Klasse 11/12
zum Auswahlseminar des BK Leipzig
zur Qualifikation für die Teilnahme
an der 3. Stufe der 64. Mathematikolympiade

Vorbemerkungen

Dem Bezirkskomitee Leipzig zur Förderung mathematisch-naturwissenschaftlich begabter und interessierter Schülerinnen und Schüler stehen für die in den Klassenstufen 9 – 12 sachsenweit zentral ausgerichtete 3. Stufe der Mathematikolympiade (MO) maximal 22 Plätze zur Verfügung. Die Entscheidung über die Zusammensetzung der Leipziger Mannschaft fällt auf einem Auswahlseminar auf der Basis der Ergebnisse der 2. Stufe sowie der Auswahlklausur. Neben der weiteren Qualifizierung unserer Kandidaten soll damit auch die Vergleichbarkeit und Transparenz im Auswahlverfahren verbessert werden.

Sie haben sich durch Ihren Erfolg bei der zweiten Stufe der MO für diese Auswahlklausur qualifiziert, die während des **Auswahlseminars am 18. 1. 2025** geschrieben wird.

Zur Vorbereitung auf die Klausur schicken wir Ihnen heute zusammen mit der Einladung zum Auswahlseminar eine Hausaufgabenserie. Es können 30 Punkte erreicht werden. Lösungen können Sie **bis zum 10. 1. 2025** an

Dr. Christoph Schulze, Kurt-Frölich-Straße 7, 01219 Dresden.

schicken. Alternativ senden Sie pdf-Dateien, nicht größer als 12MB an die E-mailadresse schulze.christoph@t-online.de. Die Lösungen werden korrigiert und vor oder während des Auswahlseminars mit Musterlösungen versehen zurückgegeben.

Die Aufgaben

Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen ist deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzustellen. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es, sie als bekannten Sachverhalt ohne Beweisangabe anzuführen.

Aufgabe 1: (6 Punkte)

Bestimmen Sie alle Paare ganzer Zahlen (x, y), welche die Gleichung

$$y^2 = x^3 + 2x^2 + 2x + 1$$

erfüllen.

Aufgabe 2: (6 Punkte)

Sei $ABCD$ ein Tetraeder mit $\angle BAC = \angle CAD = \angle DAB = 90°$. Wir bezeichnen die Mittelpunkte der Seiten $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ und $\overline{DB}$ mit X, Y und Z. Zeigen Sie, dass die Seitenflächen des Tetraeders $AXYZ$ alle den gleichen Flächeninhalt haben.

Aufgabe 3: (6 Punkte)

Wir betrachten eine natürliche Zahl n im Dezimalsystem (ohne führende Nullen). Wir bezeichnen diese als *grantig*, wenn man aus n keine Folge aufeinanderfolgender Ziffern auswählen kann, deren Produkt ein Quadrat ist.

So ist zum Beispiel 23 grantig, während 31 und 33 nicht grantig sind.

Bestimmen Sie die maximale Anzahl an Ziffern, die eine grantige Zahl haben kann.

Aufgabe 4: (6 Punkte)

Seien $x, y, z, u > 0$ mit $xyzu = 1$. Zeigen Sie, dass

$$1 \leq \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+y} + \frac{1}{1+z} + \frac{1}{1+u} \leq 3.$$

Aufgabe 5: (6 Punkte)

Für ein Dreieck ABC bezeichne r den Umkreisradius, ρ den Inkreisradius, ρ_c den Radius des Ankreises an die Seite $\overline{AB}$ und γ den Innenwinkel mit Scheitelpunkt C. Man weise nach, dass gilt

$$\rho_c - \rho = 4r \sin^2 \frac{\gamma}{2}.$$