Hausaufgabenserie für Klasse 9/10 zur Qualifikation für die Teilnahme an der 3. Stufe der 62. Mathematikolympiade

Vorbemerkungen

Dem Bezirkskomitee Leipzig zur Förderung mathematisch-naturwissenschaftlich begabter und interessierter Schülerinnen und Schüler stehen für die in den Klassenstufen 9 – 12 sachenweit zentral ausgerichtete 3. Stufe der Mathematikolympiade (MO) maximal 22 Plätze zur Verfügung. Die Entscheidung über die Zusammensetzung der Leipziger Mannschaft fällt auf einem Auswahlseminar auf der Basis der Ergebnisse der 2. Stufe sowie der Auswahlklausur. Neben der weiteren Qualifizierung unserer Kandidaten soll damit auch die Vergleichbarkeit und Transparenz im Auswahlverfahren verbessert werden.

Sie haben sich durch Ihren Erfolg bei der zweiten Stufe der MO für diese Auswahlklausur qualifiziert, die während des **Auswahlseminars am 21. 1. 2023** geschrieben wird.

Zur Vorbereitung auf die Klausur schicken wir Ihnen heute zusammen mit der Einladung zum Auswahlseminar eine Hausaufgabenserie. Die angegebene Punktzahl entspricht dem Schwierigkeitsgrad der Aufgabe. Es können 36 Punkte erreicht werden. Lösungen können Sie **bis zum 11. 1. 2023** an

Dr. A. Schüler, Hauptmannstraße 3, 04109 Leipzig

schicken. Alternativ senden Sie pdf-Dateien, nicht größer als 12MB an `schueler@math.uni-leipzig.de`

Die Lösungen werden korrigiert und während des Auswahlseminars mit Musterlösungen versehen zurückgegeben.

Die Aufgaben

Aufgabe 1: (5 Punkte)

Es sind a, b, c reelle Zahlen mit $a < b < c$. Bestimmen Sie den kleinsten Wert der Funktion

$$f(x) = |x - a| + |x - b| + |x - c| .$$

Aufgabe 2: (5 Punkte)

Die Folge a_n ist bestimmt durch $a_1 = 1349$ und $a_{2n+1} = a_{2n} = n - a_n$ für ganze Zahlen $n > 0$.

Bestimmen Sie den Wert von a_{2023}.

Aufgabe 3: (6 Punkte)

Bestimmen Sie alle ganzzahligen Lösungen (a, b, c) der Gleichung

$$2a^2 + b^2 = 5c^2.$$

Aufgabe 4: (5 Punkte)

über den Seiten eines spitzwinkligen Dreiecks ABC seien ähnliche gleichschenklige Dreiecke APB (mit $|AP| = |BP|$), AQC (mit $|AQ| = |CQ|$) und BRC (mit $|BR| = |CR|$) so gezeichnet, dass die ersten beiden außerhalb des Dreiecks ABC liegen und das dritte in der gleichen durch BC begrenzten Halbebene wie das Dreieck ABC liegt.

Beweisen Sie, dass das Viereck $APRQ$ stets ein Parallelogramm ist oder die vier Punkte A, P, R, Q auf einer Geraden liegen.

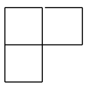
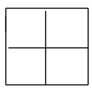
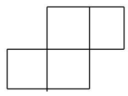
Aufgabe 5: (7 Punkte)

Finden Sie alle reellen Lösungstripel (x, y, z) des Gleichungssystems

$$\frac{x\,y}{x+y} = 1 - z, \qquad \frac{y\,z}{y+z} = 2 - x, \qquad \frac{z\,x}{z+x} = 2 - y.$$

Aufgabe 6: (8 Punkte)

Es sei n eine natürliche Zahl $n \geq 1$. Ein Quadrat der Seitenlänge $2n - 1$ wird durch Steine der folgenden Bauart überdeckt

(1)  (2)  (3) 

(a) Beweisen Sie, dass dazu mindestens $4\,n - 1$ Steine vom Typ (1) benötigt werden!

(b) Beweisen Sie mit Hilfe von (a), dass sich das 3×3 und 5×5 Quadrat nicht mit Steinen dieser drei Typen überdecken lässt.

(c) Zeigen Sie, dass sich ein 7×7 Quadrat überdecken lässt, wobei genau ein Stein vom Typ (2) oder genau ein Stein vom Typ (3) verwendet wird.

Hinweis. Markieren Sie n^2 der $(2n - 1)^2$ Quadrate so, dass jeder Stein höchstens ein markiertes Quadrat überdeckt.