Aufgabenserie für Klasse 11/12 zum Auswahlseminar des BOK Leipzig zur Qualifikation für die Teilnahme an der 3. Stufe der 58. Mathematikolympiade

Vorbemerkungen

Dem Bezirkskomitee Leipzig zur Förderung mathematisch-naturwissenschaftlich begabter und interessierter Schüler steht für die in den Klassenstufen 9 – 12 sachsenweit zentral ausgerichtete 3. Stufe der Mathematikolympiade (MO) eine beschränkte Anzahl von Plätzen zur Verfügung. Die Entscheidung über die Zusammensetzung der Leipziger Mannschaft fällt auf einem Auswahlseminar auf der Basis der Ergebnisse der 2. Stufe sowie einer Auswahlklausur. Neben der weiteren Qualifizierung unserer Kandidaten soll damit auch die Vergleichbarkeit und Transparenz im Auswahlverfahren verbessert werden.

Sie haben sich durch Ihren Erfolg bei der zweiten Stufe der MO für diese Auswahlklausur qualifiziert, die während des **Auswahlseminars am 26. 1. 2019** geschrieben wird.

Zur Vorbereitung auf das Seminar schicken wir Ihnen heute zusammen mit der Einladung zum Auswahlseminar eine Hausaufgabenserie. Lösungen können Sie **bis zum 18. 1. 2019** an

Prof. B. Kirchheim, Mathematisches Institut, Universität Leipzig, PF 100920, D-04009 Leipzig

schicken. Die Lösungen werden korrigiert und während des Auswahlseminars besprochen.

Die Aufgaben

> Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen ist deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzustellen. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es, sie als bekannten Sachverhalt ohne Beweisangabe anzuführen.

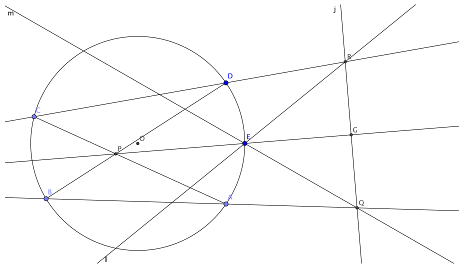
Aufgabe 1: (6 Punkte)

Bestimmen Sie alle natürlichen $n \geq 1$, so dass $n^2 + 3^n$ das Quadrat einer ganzen Zahl ist.

Aufgabe 2: (9 Punkte)

Seien fünf Punkte A, B, C, D und E im Uhrzeigersinn auf dem Rand eines Kreises angeordnet. Wir nehmen an, dass $|AE| = |ED|$ und bezeichnen mit P den Schnittpunkt der Sehnen $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$.

Sei Q der auf der Gerade AB gelegene Punkt, der $|AQ| = |DP|$ und $A \in \overline{BQ}$ erfüllt. Analog sei R der auf der Gerade CD gelegene Punkt, für den $|RD| = |AP|$ und $D \in \overline{CR}$ gilt.



Zeigen Sie, dass die Geraden PE und QR senkrecht aufeinander stehen.

Aufgabe 3: (6 Punkte)

Die Summe der nicht negativen reellen Zahlen $s_1, s_2, \ldots, s_{2019}$ ist gleich 2 und

$$s_1\, s_2 + s_2\, s_3 + \cdots + s_{2018}\, s_{2019} + s_{2019} s_1 = 1.$$

Zeigen Sie, dass für die Summe

$$S = s_1^2 + s_2^2 + \cdots + s_{2019}^2$$

stets $1 < S \leq 2$ gilt.

Aufgabe 4: (7 Punkte)

Wir betrachen Anordnungen von 1-Cent-Münzen in der Ebene, nicht notwendigerweise mit verschiedenen Mittelpunkten, und spielen mit diesen folgendes Spiel: In jedem Zug können wir beliebige zwei Münzen wählen. Deren Mitten seien an den Punkten A und B. Dann werden diese beiden Münzen so bewegt, dass sie hinterher übereinander liegen und ihr gemeinsamer Mittelpunkt in der Mitte der Strecke $\overline{AB}$ ist, alle anderen Münzen behalten ihre Position bei.

Wir nennen eine Anordnung solcher Münzen „stapelbar" wenn man mit endlich vielen Zügen erreichen kann, dass alle Münzen genau übereinander liegen. Sei eine beliebige Zahl n gegeben. Zeigen Sie: jede Konfiguration von n Münzen ist stapelbar genau dann wenn n eine Zweierpotenz ist.

Aufgabe 5: (9 Punkte)

Gegeben sei ein gleichseitiges Dreieck ABC.

Bestimmen Sie den geometrischen Ort aller Punkte X der Ebene, für welche

$$|AX| + |BX| = |CX|$$

gilt.