Aufgabenserie für Klasse 9/10 des BOK Leipzig zur Vorbereitung auf die Teilnahme an der 3. Stufe der 52. Mathematikolympiade

Vorbemerkungen

Dem Bezirkskomitee Leipzig zur Förderung mathematisch-naturwissenschaftlich begabter und interessierter Schüler steht für die in den Klassenstufen 9–12 sachsenweit zentral ausgerichtete 3. Stufe der Mathematikolympiade (MO) eine beschränkte Anzahl von Plätzen zur Verfügung. Die Entscheidung über die Zusammensetzung der Leipziger Mannschaft fällt auf einem Auswahlseminar auf der Basis der Ergebnisse der 2. Stufe sowie einer Auswahlklausur. Neben der weiteren Qualifizierung unserer Kandidaten soll damit auch die Vergleichbarkeit und Transparenz im Auswahlverfahren besser gewährleistet werden.

Sie haben sich durch Ihren Erfolg bei der zweiten Stufe der MO für diese Auswahlklausur qualifiziert, die während des **Auswahlseminars am 19. Januar 2013** geschrieben wird.

Zur Vorbereitung auf die Klausur schicken wir Ihnen heute zusammen mit der Einladung zum Auswahlseminar eine Hausaufgabenserie. Die angegebene Punktzahl entspricht dem Schwierigkeitsgrad der Aufgabe. Lösungen können Sie **bis zum 6. Januar 2013** einsenden an

Prof. Dr. H.-G. Gräbe, Herwigstraße 30, 04279 Leipzig.

Die Lösungen werden korrigiert und die Aufgaben während des Auswahlseminars besprochen.

Die Aufgaben

Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen ist deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzustellen. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es, sie als bekannten Sachverhalt ohne Beweisangabe anzuführen.

Aufgabe 1: (4 Punkte)

Untersuchen Sie, ob es natürliche Zahlen n mit der folgenden Eigenschaft gibt: Sowohl die Quersumme von n als auch die Quersumme des unmittelbaren Nachfolgers $(n+1)$ sind durch 11 teilbar.

Wenn es solche Zahlen gibt, so ist die kleinste natürliche Zahl mit dieser Eigenschaft anzugeben.

Aufgabe 2: (5 Punkte)

Im Inneren eines rechtwinkligen Dreiecks ABC mit dem rechten Winkel bei C sei ein Punkt M derart gegeben, dass die Dreiecke ABM, BCM und CAM flächengleich sind.

Zeigen Sie, dass dann $5\,|MC|^2 = |MA|^2 + |MB|^2$ gilt.

Aufgabe 3: (6 Punkte)

a) Finden Sie alle ganzzahligen Lösungstripel (x, y, z) des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} 2\,x\,y + y\,z &= 27\,, \\ 3\,y\,z - 2\,x\,z &= 25\,, \\ x\,z - x\,y &= 4\,. \end{aligned}$$

b) Untersuchen Sie, ob es weitere reelle Lösungstripel (x, y, z) des Gleichungssystems gibt.

Aufgabe 4: (8 Punkte)

Wir betrachten die Funktion $u(n) = \dfrac{19\,n + 17}{7\,n + 11}$.

a) Erstellen Sie eine Wertetabelle von $u(n)$ für $n = 1, 2, 3, \ldots, 10$ und bestimmen Sie daraus diejenigen n, für die sich $u(n)$ als Bruch nicht weiter kürzen lässt.

b) Bestimmen Sie alle ganzen Zahlen n, für welche $u(n)$ eine ganze Zahl ist.

c) Bestimmen Sie alle ganzen Zahlen n, für welche sich $u(n)$ als Bruch nicht weiter kürzen lässt.

Aufgabe 5: (10 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass für ganze Zahlen $n > 1$ stets $\dfrac{1}{n^2} < \dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n}$ gilt.

b) Es sei $S = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{4\,052\,169}$ die Summe der Kehrwerte der ersten 2013 Quadratzahlen.

Beweisen Sie, dass $S < 2$ gilt.

c) Die Zahlen $D_k = \frac{k\,(k+1)}{2}$ für $k \geq 1$, also $D_1 = 1$, $D_2 = 3$, $D_3 = 6$, $D_4 = 10, \ldots$, bezeichnet man als *Dreieckszahlen.*

Beweisen Sie, dass die Summe der Kehrwerte der ersten 2013 Dreieckszahlen ebenfalls kleiner als 2 ist.

Anmerkung: D_k ist gleich der Summe der ersten k natürlichen Zahlen. Dies entspricht der Anzahl der Kugeln in einer ebenen Anordnung als Dreieck, in der die erste Reihe eine Kugel, die zweite Reihe zwei Kugeln usw. enthält. Daher der Name *Dreieckszahlen.*

Legt man aus Kugeln auf ähnliche Weise Quadrate, so ergibt sich eine Summenformel für die der ersten k ungeraden Zahlen. Das Ergebnis sind die (auch im herkömmlichen Verständnis) *Quadratzahlen.*