Aufgabenserie für Klasse 11/12 des BOK Leipzig zur Vorbereitung auf die Teilnahme an der 3. Stufe der 52. Mathematikolympiade

Vorbemerkungen

Dem Bezirkskomitee Leipzig zur Förderung mathematisch-naturwissenschaftlich begabter und interessierter Schüler steht für die in den Klassenstufen 9–12 sachsenweit zentral ausgerichtete 3. Stufe der Mathematikolympiade (MO) eine beschränkte Anzahl von Plätzen zur Verfügung. Die Entscheidung über die Zusammensetzung der Leipziger Mannschaft fällt auf einem Auswahlseminar auf der Basis der Ergebnisse der 2. Stufe sowie einer Auswahlklausur. Neben der weiteren Qualifizierung unserer Kandidaten soll damit auch die Vergleichbarkeit und Transparenz im Auswahlverfahren besser gewährleistet werden.

Sie haben sich durch Ihren Erfolg bei der zweiten Stufe der MO für diese Auswahlklausur qualifiziert, die während des **Auswahlseminars am 19. Januar 2013** geschrieben wird.

Zur Vorbereitung auf die Klausur schicken wir Ihnen heute zusammen mit der Einladung zum Auswahlseminar eine Hausaufgabenserie. Die angegebene Punktzahl entspricht dem Schwierigkeitsgrad der Aufgabe. Lösungen können Sie **bis zum 6. Januar 2013** einsenden an

Prof. Dr. H.-G. Gräbe, Herwigstraße 30, 04279 Leipzig.

Die Lösungen werden korrigiert und die Aufgaben während des Auswahlseminars besprochen.

Die Aufgaben

Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen ist deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzustellen. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es, sie als bekannten Sachverhalt ohne Beweisangabe anzuführen.

Aufgabe 1: (4 Punkte)

Wie viele geordnete Paare (a, b) natürlicher Zahlen gibt es mit

$$0 < a < 2013,\ 0 < b < 2013 \text{ und } \sqrt{a - \sqrt{b}} = \sqrt{b} - \sqrt{a}\,?$$

Aufgabe 2: (4 Punkte)

Zeigen Sie die Gültigkeit der Beziehung

$$\sqrt{\underbrace{111\ldots11}_{2n} - \underbrace{222\ldots22}_{n}} = \underbrace{333\ldots33}_{n}$$

für natürliche Zahlen $n > 0$, wobei die Zahl unter der geschweiften Klammer jeweils die Anzahl der Ziffern der jeweiligen Zahl über der Klammer angibt.

Aufgabe 3: (7 Punkte)

Von einem Dreieck ABC sind die Längen der Höhen h_a durch A, h_b durch B sowie die Länge s_a der Seitenhalbierenden durch A gegeben.

a) Konstruieren Sie das Dreieck ABC unter alleiniger Verwendung von Zirkel und Lineal.

   Geben Sie dazu eine allgemeine Beschreibung, wie das Dreieck schrittweise konstruiert werden kann, und führen Sie die Konstruktion entsprechend Ihrer Beschreibung für die Streckenlängen $h_a = 5\,\text{cm}$, $h_b = 6\,\text{cm}$, $s_a = 7\,\text{cm}$ aus.

b) Zeigen Sie, dass im so konstruierten Dreieck die entsprechenden Transversalen auch wirklich die vorgegebenen Längen haben. (Korrektheitsnachweis)

c) Untersuchen Sie, ob es weitere Dreiecke gibt, in denen die entsprechenden Transversalen die vorgegebenen Längen haben. (Vollständigkeits- bzw. Einzigkeitsnachweis)

d) Untersuchen Sie, unter welchen Bedingungen an die gegebenen Streckenlängen ein solches Dreieck ABC überhaupt existiert. (Bestimmung der Ausführbarkeit der Konstruktion – Determination)

Aufgabe 4: (7 Punkte)

Untersuchen Sie, ob es nicht triviale Pythagoräische Tripel (a, b, c) und (b, c, d) gibt, d. h. positive ganze Zahlen a, b, c, d, für die $a^2 + b^2 = c^2$ und $b^2 + c^2 = d^2$ gilt.

Aufgabe 5: (6 Punkte)

$ABCD$ sei eine dreiseitige Pyramide (Tetraeder), in der die Seitenflächen ABD, ACD und BCD jeweils rechtwinklige Dreiecke mit rechten Winkel bei D sind.

Wir betrachten die Menge aller solchen Tetraeder mit gleichem Volumen V.

Untersuchen Sie, ob es unter diesen Tetraedern eines mit kleinster Kantensumme u gibt und bestimmen Sie u gegebenenfalls in Abhängigkeit von V.