Von Gruppen, Würfeln und Perlenketten

oder

warum doppeltes Abzählen lohnt

Bernd Kirchheim
(Uni Leipzig)

Tanja bringt ihre neue DIY-Halskette mit aus den Ferien. Sie hat 12 rote und 12 blaue Perlen, allerdings passen auch nur genau 12 Perlen auf die (wiederverschliessbare) Schnur.

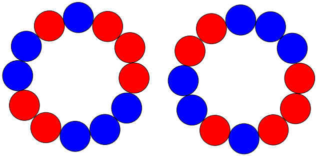
Tanja bringt ihre neue DIY-Halskette mit aus den Ferien. Sie hat 12 rote und 12 blaue Perlen, allerdings passen auch nur genau 12 Perlen auf die (wiederverschliessbare) Schnur.

Stolz sagt sie: nun kann ich jeden Tag eine andere Halskette tragen, weil es ja $2^{12} = 4096$ verschiedene Anordnungen der beiden Farben gibt.

Tanja bringt ihre neue DIY-Halskette mit aus den Ferien. Sie hat 12 rote und 12 blaue Perlen, allerdings passen auch nur genau 12 Perlen auf die (wiederverschliessbare) Schnur.

Stolz sagt sie: nun kann ich jeden Tag eine andere Halskette tragen, weil es ja $2^{12} = 4096$ verschiedene Anordnungen der beiden Farben gibt.

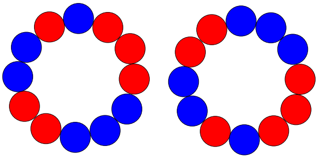
Peter fragt: kannst Du sicher sein, dass die Kette nicht genau wie eine vorherige wird, wenn sie dir am Hals verrutscht oder Du sie andersrum anlegst?



Tanja bringt ihre neue DIY-Halskette mit aus den Ferien. Sie hat 12 rote und 12 blaue Perlen, allerdings passen auch nur genau 12 Perlen auf die (wiederverschliessbare) Schnur.

Stolz sagt sie: nun kann ich jeden Tag eine andere Halskette tragen, weil es ja $2^{12} = 4096$ verschiedene Anordnungen der beiden Farben gibt.

Peter fragt: kannst Du sicher sein, dass die Kette nicht genau wie eine vorherige wird, wenn sie dir am Hals verrutscht oder Du sie andersrum anlegst?



Wieviele verschiedene Ketten gibt es nun?

Wir wollen diese und ähnliche Fragen studieren, und effektive Lösungen durch doppeltes Abzählen finden. Zunächst jedoch eine Warnung

Wir wollen diese und ähnliche Fragen studieren, und effektive Lösungen durch doppeltes Abzählen finden. Zunächst jedoch eine Warnung

Die Mathematiker sind eine Art Franzosen: Redet man zu ihnen, so übersetzen sie es in ihre Sprache, und dann ist es alsobald ganz etwas anderes.

J. W. von Goethe

Wir wollen diese und ähnliche Fragen studieren, und effektive Lösungen durch doppeltes Abzählen finden. Zunächst jedoch eine Warnung

Die Mathematiker sind eine Art Franzosen: Redet man zu ihnen, so übersetzen sie es in ihre Sprache, und dann ist es alsobald ganz etwas anderes.

J. W. von Goethe

2.Warnung:

Wir wollen diese und ähnliche Fragen studieren, und effektive Lösungen durch doppeltes Abzählen finden. Zunächst jedoch eine Warnung

Die Mathematiker sind eine Art Franzosen: Redet man zu ihnen, so übersetzen sie es in ihre Sprache, und dann ist es alsobald ganz etwas anderes.

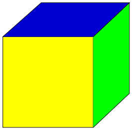
J. W. von Goethe

2.Warnung: Auch grosse Dichter können irren.
Und das ist auch gut so.

Ein anderes Beispiel

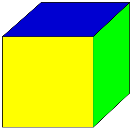
Ein anderes Beispiel

Wir betrachten einen Würfel, dessen Seiten mit jeweils einer von k Farben eingefärbt wird.



Ein anderes Beispiel

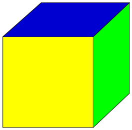
Wir betrachten einen Würfel, dessen Seiten mit jeweils einer von k Farben eingefärbt wird.



Wieviele verschiedene Färbungen gibt es, die sich nicht durch irgendeine Drehung des Würfels aufeinander überführen lassen?

Ein anderes Beispiel

Wir betrachten einen Würfel, dessen Seiten mit jeweils einer von k Farben eingefärbt wird.

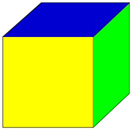


Wieviele verschiedene Färbungen gibt es, die sich nicht durch irgendeine Drehung des Würfels aufeinander überführen lassen?

Wieviele Färbungen gibt es überhaupt?

Ein anderes Beispiel

Wir betrachten einen Würfel, dessen Seiten mit jeweils einer von k Farben eingefärbt wird.

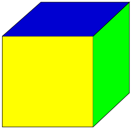


Wieviele verschiedene Färbungen gibt es, die sich nicht durch irgendeine Drehung des Würfels aufeinander überführen lassen?

Wieviele Färbungen gibt es überhaupt? k^6

Ein anderes Beispiel

Wir betrachten einen Würfel, dessen Seiten mit jeweils einer von k Farben eingefärbt wird.



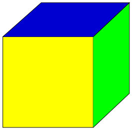
Wieviele verschiedene Färbungen gibt es, die sich nicht durch irgendeine Drehung des Würfels aufeinander überführen lassen?

Wieviele Färbungen gibt es überhaupt? k^6

Wieviele Drehungen des Würfels gibt es

Ein anderes Beispiel

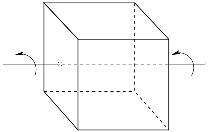
Wir betrachten einen Würfel, dessen Seiten mit jeweils einer von k Farben eingefärbt wird.



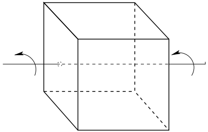
Wieviele verschiedene Färbungen gibt es, die sich nicht durch irgendeine Drehung des Würfels aufeinander überführen lassen?

Wieviele Färbungen gibt es überhaupt? k^6

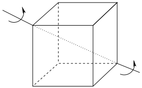
Wieviele Drehungen des Würfels gibt es ??



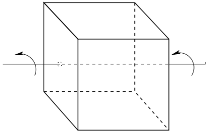
Rotation um 90, 180, 270 Grad und 3 Achsen $\Rightarrow$ **9**



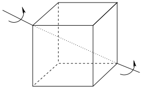
Rotation um 90, 180, 270 Grad und 3 Achsen $\Rightarrow$ **9**



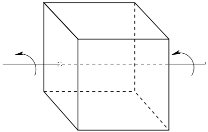
Rotation um



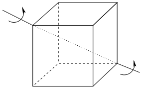
Rotation um 90, 180, 270 Grad und 3 Achsen $\Rightarrow$ **9**



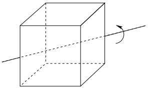
Rotation um 120, 240 Grad und 4 Achsen $\Rightarrow$ **8**



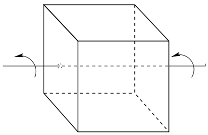
Rotation um 90, 180, 270 Grad und 3 Achsen $\Rightarrow$ **9**



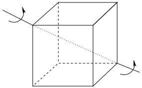
Rotation um 120, 240 Grad und 4 Achsen $\Rightarrow$ **8**



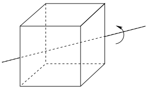
Rotation um



Rotation um 90, 180, 270 Grad und 3 Achsen $\Rightarrow$ **9**

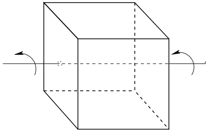


Rotation um 120, 240 Grad und 4 Achsen $\Rightarrow$ **8**

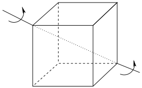


Rotation um 180 Grad und 6 Achsen $\Rightarrow$ **6**

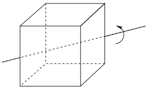
Nun alle? total **23**



Rotation um 90, 180, 270 Grad und 3 Achsen ⇒ **9**



Rotation um 120, 240 Grad und 4 Achsen ⇒ **8**



Rotation um 180 Grad und 6 Achsen ⇒ **6**

Nein, auch triviale Rotation (0 Grad) zählt. total **24**

Nun wirklich alle?

Gruppen

Warum Identität (0-Rotation) wichtig? erhalten Gruppe

Gruppen

Warum Identität (0-Rotation) wichtig? erhalten Gruppe

Die Rotationen des Raumes bilden eine Gruppe $\mathcal{G}$, d.h

a) $f \in \mathcal{G}$ und $g \in \mathcal{G}$ dann ist Zusammensetzung $f \circ g \in \mathcal{G}$

Gruppen

Warum Identität (0-Rotation) wichtig? erhalten Gruppe

Die Rotationen des Raumes bilden eine Gruppe $\mathcal{G}$, d.h

a) $f \in \mathcal{G}$ und $g \in \mathcal{G}$ dann ist Zusammensetzung $f \circ g \in \mathcal{G}$

b) Es gibt $I = I_{\mathcal{G}} \in \mathcal{G}$ so dass $f \circ I = I \circ f = f$ für alle $f \in \mathcal{G}$

Gruppen

Warum Identität (0-Rotation) wichtig? erhalten Gruppe

Die Rotationen des Raumes bilden eine Gruppe $\mathcal{G}$, d.h

a) $f \in \mathcal{G}$ und $g \in \mathcal{G}$ dann ist Zusammensetzung $f \circ g \in \mathcal{G}$

b) Es gibt $I = I_{\mathcal{G}} \in \mathcal{G}$ so dass $f \circ I = I \circ f = f$ für alle $f \in \mathcal{G}$

c) Für jedes $f \in \mathcal{G}$ gibt es $g \in \mathcal{G}$ mit $f \circ g = g \circ f = I$

Gruppen

Warum Identität (0-Rotation) wichtig? erhalten Gruppe

Die Rotationen des Raumes bilden eine Gruppe $\mathcal{G}$, d.h

a) $f \in \mathcal{G}$ und $g \in \mathcal{G}$ dann ist Zusammensetzung $f \circ g \in \mathcal{G}$

b) Es gibt $I = I_{\mathcal{G}} \in \mathcal{G}$ so dass $f \circ I = I \circ f = f$ für alle $f \in \mathcal{G}$

c) Für jedes $f \in \mathcal{G}$ gibt es $g \in \mathcal{G}$ mit $f \circ g = g \circ f = I$

d) $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$ wenn $f, g, h \in \mathcal{G}$

Gruppen

Warum Identität (0-Rotation) wichtig? erhalten Gruppe

Die Rotationen des Raumes bilden eine Gruppe $\mathcal{G}$, d.h

a) $f \in \mathcal{G}$ und $g \in \mathcal{G}$ dann ist Zusammensetzung $f \circ g \in \mathcal{G}$

b) Es gibt $I = I_{\mathcal{G}} \in \mathcal{G}$ so dass $f \circ I = I \circ f = f$ für alle $f \in \mathcal{G}$

c) Für jedes $f \in \mathcal{G}$ gibt es $g \in \mathcal{G}$ mit $f \circ g = g \circ f = I$

d) $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$ wenn $f, g, h \in \mathcal{G}$

die selben Eigenschaften haben die (wenigen) Rotationen, die den Würfel auf sich selbst drehen!

Gruppen

Warum Identität (0-Rotation) wichtig? erhalten Gruppe

Die Rotationen des Raumes bilden eine Gruppe $\mathcal{G}$, d.h

a) $f \in \mathcal{G}$ und $g \in \mathcal{G}$ dann ist Zusammensetzung $f \circ g \in \mathcal{G}$

b) Es gibt $I = I_{\mathcal{G}} \in \mathcal{G}$ so dass $f \circ I = I \circ f = f$ für alle $f \in \mathcal{G}$

c) Für jedes $f \in \mathcal{G}$ gibt es $g \in \mathcal{G}$ mit $f \circ g = g \circ f = I$

d) $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$ wenn $f, g, h \in \mathcal{G}$

die selben Eigenschaften haben die (wenigen) Rotationen, die den Würfel auf sich selbst drehen!

a) nicht so einfach, nutzt Rotation gleichbedeutend mit Abstand und Orientierung erhaltend.

Gruppen

Warum Identität (0-Rotation) wichtig? erhalten Gruppe

Die Rotationen des Raumes bilden eine Gruppe $\mathcal{G}$, d.h

a) $f \in \mathcal{G}$ und $g \in \mathcal{G}$ dann ist Zusammensetzung $f \circ g \in \mathcal{G}$

b) Es gibt $I = I_{\mathcal{G}} \in \mathcal{G}$ so dass $f \circ I = I \circ f = f$ für alle $f \in \mathcal{G}$

c) Für jedes $f \in \mathcal{G}$ gibt es $g \in \mathcal{G}$ mit $f \circ g = g \circ f = I$

d) $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$ wenn $f, g, h \in \mathcal{G}$

die selben Eigenschaften haben die (wenigen) Rotationen, die den Würfel auf sich selbst drehen!

a) nicht so einfach, nutzt Rotation gleichbedeutend mit Abstand und Orientierung erhaltend.

Jede Rotation f des Raumes hat eine Achsgerade A, d.h. $f(x) = x$ wenn der Punkt x auf der Achse A liegt. Leicht gesagt aber nicht so einfach, zB in der Ebene oder 4 Dimensionen gilt dies nicht für jedes f, das Abstand und Orientierung erhält.

Gruppen

Warum Identität (0-Rotation) wichtig? erhalten Gruppe

Die Rotationen des Raumes bilden eine Gruppe $\mathcal{G}$, d.h

a) $f \in \mathcal{G}$ und $g \in \mathcal{G}$ dann ist Zusammensetzung $f \circ g \in \mathcal{G}$

b) Es gibt $I = I_{\mathcal{G}} \in \mathcal{G}$ so dass $f \circ I = I \circ f = f$ für alle $f \in \mathcal{G}$

c) Für jedes $f \in \mathcal{G}$ gibt es $g \in \mathcal{G}$ mit $f \circ g = g \circ f = I$

d) $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$ wenn $f, g, h \in \mathcal{G}$

die selben Eigenschaften haben die (wenigen) Rotationen, die den Würfel auf sich selbst drehen!

a) nicht so einfach, nutzt Rotation gleichbedeutend mit Abstand und Orientierung erhaltend.

Jede Rotation f des Raumes hat eine Achsgerade A, d.h. $f(x) = x$ wenn der Punkt x auf der Achse A liegt. Leicht gesagt aber nicht so einfach, zB in der Ebene oder 4 Dimensionen gilt dies nicht für jedes f, das Abstand und Orientierung erhält.

Wieder: warum nur 24 Drehungen des Würfels?

Ein Symbol

Ein Symbol

Wir haben alle gehört was eine Menge ist, z.B.

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\},$$

wir bezeichnen die **Zahl** ihrer Elemente (also hier n) mit $\#(\Omega)$

Sei $\mathcal{R}_W$ Gruppe aller Rotationen des Würfels, wollen $\#(\mathcal{R}_W)$ finden.

Sei $\mathcal{R}_W$ Gruppe aller Rotationen des Würfels, wollen $\#(\mathcal{R}_W)$ finden.
Für alle Ecken e, e' des Würfels gibt eine Rotation $f \in \mathcal{R}_W$, die e nach e' sendet!
Beweis: es geht für Nachbarn und $\mathcal{R}_W$ Gruppe.

Wieviele $f \in \mathcal{R}_W$ senden e nach e?
$\mathrm{Fix}(e) = \{f \in \mathcal{R}_W, f(e) = e\}$, $\#\mathrm{Fix}(e) =$

Sei $\mathcal{R}_W$ Gruppe aller Rotationen des Würfels, wollen $\#(\mathcal{R}_W)$ finden.
Für alle Ecken e, e' des Würfels gibt eine Rotation $f \in \mathcal{R}_W$, die e nach e' sendet!
Beweis: es geht für Nachbarn und $\mathcal{R}_W$ Gruppe.

Wieviele $f \in \mathcal{R}_W$ senden e nach e?
$\text{Fix}(e) = \{f \in \mathcal{R}_W, f(e) = e\}$, $\#\text{Fix}(e) = 3$

Sei $\mathcal{R}_W$ Gruppe aller Rotationen des Würfels, wollen $\#(\mathcal{R}_W)$ finden.
Für alle Ecken e, e' des Würfels gibt eine Rotation $f \in \mathcal{R}_W$, die e nach e' sendet!
Beweis: es geht für Nachbarn und $\mathcal{R}_W$ Gruppe.

Wieviele $f \in \mathcal{R}_W$ senden e nach e?
$\mathrm{Fix}(e) = \{f \in \mathcal{R}_W, f(e) = e\}$, $\#\mathrm{Fix}(e) = 3$
Für jedes (andere) e' gibt es ein $f_{e'}$ mit $f_{e'}(e') = e$. Wenn also $g(e) = e'$ dann $(f_{e'} \circ g)(e) = e$, also 3 Möglichkeiten für $f_{e'} \circ g \in \mathrm{Fix}$ und somit für g. Da e auf jede der 8 Ecken genau von 3 Rotation geschickt wird, gibt es $3 \cdot 8 = 24$ Rotation in $\mathcal{R}_W$.

Sei $\mathcal{R}_W$ Gruppe aller Rotationen des Würfels, wollen $\#(\mathcal{R}_W)$ finden.
Für alle Ecken e, e' des Würfels gibt eine Rotation $f \in \mathcal{R}_W$, die e nach e' sendet!
Beweis: es geht für Nachbarn und $\mathcal{R}_W$ Gruppe.

Wieviele $f \in \mathcal{R}_W$ senden e nach e?
$\mathrm{Fix}(e) = \{f \in \mathcal{R}_W, f(e) = e\}$, $\#\mathrm{Fix}(e) = 3$
Für jedes (andere) e' gibt es ein $f_{e'}$ mit $f_{e'}(e') = e$. Wenn also $g(e) = e'$ dann $(f_{e'} \circ g)(e) = e$, also 3 Möglichkeiten für $f_{e'} \circ g \in \mathrm{Fix}$ und somit für g. Da e auf jede der 8 Ecken genau von 3 Rotation geschickt wird, gibt es $3 \cdot 8 = 24$ Rotation in $\mathcal{R}_W$.

Analog können wir fragen, wieviele $f \in \mathcal{R}_W$ eine der 12 Kanten erhalten

Sei $\mathcal{R}_W$ Gruppe aller Rotationen des Würfels, wollen $\#(\mathcal{R}_W)$ finden.

Für alle Ecken e, e' des Würfels gibt eine Rotation $f \in \mathcal{R}_W$, die e nach e' sendet!

Beweis: es geht für Nachbarn und $\mathcal{R}_W$ Gruppe.

Wieviele $f \in \mathcal{R}_W$ senden e nach e?

$\mathrm{Fix}(e) = \{f \in \mathcal{R}_W, f(e) = e\}$, $\#\mathrm{Fix}(e) = 3$

Für jedes (andere) e' gibt es ein $f_{e'}$ mit $f_{e'}(e') = e$. Wenn also $g(e) = e'$ dann $(f_{e'} \circ g)(e) = e$, also 3 Möglichkeiten für $f_{e'} \circ g \in \mathrm{Fix}$ und somit für g. Da e auf jede der 8 Ecken genau von 3 Rotation geschickt wird, gibt es $3 \cdot 8 = 24$ Rotation in $\mathcal{R}_W$.

Analog können wir fragen, wieviele $f \in \mathcal{R}_W$ eine der 12 Kanten erhalten(**zwei**) oder eine der 6 Flächen erhalten

Sei $\mathcal{R}_W$ Gruppe aller Rotationen des Würfels, wollen $\#(\mathcal{R}_W)$ finden.
Für alle Ecken e, e' des Würfels gibt eine Rotation $f \in \mathcal{R}_W$, die e nach e' sendet!
Beweis: es geht für Nachbarn und $\mathcal{R}_W$ Gruppe.

Wieviele $f \in \mathcal{R}_W$ senden e nach e?
$\mathrm{Fix}(e) = \{f \in \mathcal{R}_W, f(e) = e\}$, $\#\mathrm{Fix}(e) = 3$
Für jedes (andere) e' gibt es ein $f_{e'}$ mit $f_{e'}(e') = e$. Wenn also $g(e) = e'$ dann $(f_{e'} \circ g)(e) = e$, also 3 Möglichkeiten für $f_{e'} \circ g \in \mathrm{Fix}$ und somit für g. Da e auf jede der 8 Ecken genau von 3 Rotation geschickt wird, gibt es $3 \cdot 8 = 24$ Rotation in $\mathcal{R}_W$.

Analog können wir fragen, wieviele $f \in \mathcal{R}_W$ eine der 12 Kanten erhalten(**zwei**) oder eine der 6 Flächen erhalten (**vier**) Immer

$$\#(\mathcal{R}_W) = 24 = 3 \cdot 8 = 2 \cdot 12 = 4 \cdot 6,$$

Sei $\mathcal{R}_W$ Gruppe aller Rotationen des Würfels, wollen $\#(\mathcal{R}_W)$ finden.
Für alle Ecken e, e' des Würfels gibt eine Rotation $f \in \mathcal{R}_W$, die e nach e' sendet!
Beweis: es geht für Nachbarn und $\mathcal{R}_W$ Gruppe.

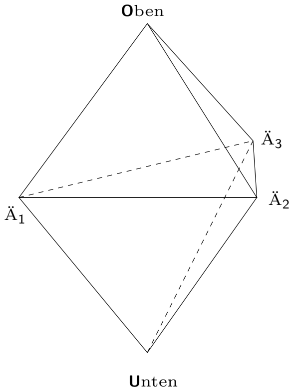
Wieviele $f \in \mathcal{R}_W$ senden e nach e?
$\text{Fix}(e) = \{f \in \mathcal{R}_W, f(e) = e\}$, $\#\text{Fix}(e) = 3$
Für jedes (andere) e' gibt es ein $f_{e'}$ mit $f_{e'}(e') = e$. Wenn also $g(e) = e'$ dann $(f_{e'} \circ g)(e) = e$, also 3 Möglichkeiten für $f_{e'} \circ g \in \text{Fix}$ und somit für g. Da e auf jede der 8 Ecken genau von 3 Rotation geschickt wird, gibt es $3 \cdot 8 = 24$ Rotation in $\mathcal{R}_W$.

Analog können wir fragen, wieviele $f \in \mathcal{R}_W$ eine der 12 Kanten erhalten(**zwei**) oder eine der 6 Flächen erhalten (**vier**) Immer

$$\#(\mathcal{R}_W) = 24 = 3 \cdot 8 = 2 \cdot 12 = 4 \cdot 6,$$

oder allgemeiner $\#(\mathcal{G}) = \#\text{Fix}(\omega) \cdot \#\text{orb}(\omega)$, wenn das Orbit $\text{orb}(\omega)$ die Menge aller Bilder der Ecke, Kante, oder Fläche ω ist.

Nicht so einfach, aber funktioniert auch



Doppelpyramide

$$\#(\mathcal{G}) = \#\mathsf{Fix}(\omega) \cdot \#\mathsf{orb}(\omega)$$

Hier entweder $6 = 3 \cdot 2$ (Oben und Unten) oder $6 = 2 \cdot 3$ (ω im Äquator)

Noch ein Symbol

Da wir viel zählen wollen, müssen wir viel addieren. Wenn jedem Element $\omega \in \Omega$ eine Zahl $f(\omega)$ zugeordnet ist, dann ist

$$\sum_{\omega \in \Omega} f(\omega) \text{ die Summe aller dieser Zahlen.}$$

Noch ein Symbol

Da wir viel zählen wollen, müssen wir viel addieren. Wenn jedem Element $\omega \in \Omega$ eine Zahl $f(\omega)$ zugeordnet ist, dann ist

$$\sum_{\omega \in \Omega} f(\omega) \text{ die Summe aller dieser Zahlen.}$$

Man muss weniger schreiben, und also

$$\sum_{\omega \in \Omega} f(\omega) = f(\omega_1) + f(\omega_2) + \ldots + f(\omega_n)$$

im obigen Beispiel $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$.

Noch ein Symbol

Da wir viel zählen wollen, müssen wir viel addieren. Wenn jedem Element $\omega \in \Omega$ eine Zahl $f(\omega)$ zugeordnet ist, dann ist

$$\sum_{\omega \in \Omega} f(\omega) \text{ die Summe aller dieser Zahlen.}$$

Man muss weniger schreiben, und also

$$\sum_{\omega \in \Omega} f(\omega) = f(\omega_1) + f(\omega_2) + \ldots + f(\omega_n)$$

im obigen Beispiel $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$.
Wichtig: $\sum_{\omega \in \Omega} f(\omega)$ ist unabhängig von der Reihenfolge des Addierens.

Die Übersetzung

Wollen nun ursprüngliche Frage angehen: Wieviele Färbungen des Würfels W sind verschieden nach Rotation?

- Ω Menge aller Färbungen mit k-Farben. $\#(\Omega) = k^6$

Die Übersetzung

Wollen nun ursprüngliche Frage angehen: Wieviele Färbungen des Würfels W sind verschieden nach Rotation?

- Ω Menge aller Färbungen mit k-Farben. $\#(\Omega) = k^6$
- Gruppe $\mathcal{R}_W$ agiert auf Ω: wenn $f \in \mathcal{R}_W$ und ω Färbung, dann $\omega^f \in \Omega$ die durch Verdrehen entstandene Färbung. Wichtig $\omega^{f \circ g} = (\omega^f)^g$.

Die Übersetzung

Wollen nun ursprüngliche Frage angehen: Wieviele Färbungen des Würfels W sind verschieden nach Rotation?

- Ω Menge aller Färbungen mit k-Farben. $\#(\Omega) = k^6$
- Gruppe $\mathcal{R}_W$ agiert auf Ω: wenn $f \in \mathcal{R}_W$ und ω Färbung, dann $\omega^f \in \Omega$ die durch Verdrehen entstandene Färbung. Wichtig $\omega^{f \circ g} = (\omega^f)^g$.

Also betrachten wir zwei Färbungen ω, ω' als gleich, wenn $\omega' = \omega^f$ für ein $f \in \mathcal{R}_W$,

Die Übersetzung

Wollen nun ursprüngliche Frage angehen: Wieviele Färbungen des Würfels W sind verschieden nach Rotation?

- Ω Menge aller Färbungen mit k-Farben. $\#(\Omega) = k^6$
- Gruppe $\mathcal{R}_W$ agiert auf Ω: wenn $f \in \mathcal{R}_W$ und ω Färbung, dann $\omega^f \in \Omega$ die durch Verdrehen entstandene Färbung. Wichtig $\omega^{f \circ g} = (\omega^f)^g$.

Also betrachten wir zwei Färbungen ω, ω' als gleich, wenn $\omega' = \omega^f$ für ein $f \in \mathcal{R}_W$, d.h. wenn

$$\omega' \in \operatorname{orb}(\omega) = \{\omega^f \,:\, f \in \mathcal{R}_W\}.$$

Die Übersetzung

Wollen nun ursprüngliche Frage angehen: Wieviele Färbungen des Würfels W sind verschieden nach Rotation?

- Ω Menge aller Färbungen mit k-Farben. $\#(\Omega) = k^6$
- Gruppe $\mathcal{R}_W$ agiert auf Ω: wenn $f \in \mathcal{R}_W$ und ω Färbung, dann $\omega^f \in \Omega$ die durch Verdrehen entstandene Färbung. Wichtig $\omega^{f \circ g} = (\omega^f)^g$.

Also betrachten wir zwei Färbungen ω, ω' als gleich, wenn $\omega' = \omega^f$ für ein $f \in \mathcal{R}_W$, d.h. wenn

$$\omega' \in \mathrm{orb}(\omega) = \{\omega^f \ : \ f \in \mathcal{R}_W\}.$$

Somit, und in unserem Mathematiker-Französisch, wollen wir die Anzahl der verschiedenen Orbite kennen.

Die wichtige Formel

Wir wissen $\#(\mathcal{R}_W) = \#\mathrm{Fix}(\omega) \cdot \#\mathrm{orb}(\omega)$ für jedes ω, und wir haben auch gezeigt $\#\mathrm{Fix}(\omega) = \#\mathrm{Fix}(\omega')$ wenn $\omega' \in \mathrm{orb}(\omega)$. Also

$$\#(\mathcal{R}_W) = \sum_{\omega' \in \mathrm{orb}(\omega)} \#\mathrm{Fix}(\omega') \text{ für alle Färbungen } \omega.$$

Nun summieren wir diese Gleichung nochmal üeber alle Orbite, auch wenn wir nicht wissen, **wieviele** das sind. Aber jedes $\omega \in \Omega$ ist in genau einem Orbit!

Die wichtige Formel

Wir wissen $\#(\mathcal{R}_W) = \#\mathrm{Fix}(\omega) \cdot \#\mathrm{orb}(\omega)$ für jedes ω, und wir haben auch gezeigt $\#\mathrm{Fix}(\omega) = \#\mathrm{Fix}(\omega')$ wenn $\omega' \in \mathrm{orb}(\omega)$. Also

$$\#(\mathcal{R}_W) = \sum_{\omega' \in \mathrm{orb}(\omega)} \#\mathrm{Fix}(\omega') \text{ für alle Färbungen } \omega.$$

Nun summieren wir diese Gleichung nochmal üeber alle Orbite, auch wenn wir nicht wissen, **wieviele** das sind. Aber jedes $\omega \in \Omega$ ist in genau einem Orbit!

$$\begin{aligned}
\#(\mathcal{R}_W) \cdot (\text{Anzahl der Orbite}) &= \sum_{\omega \in \Omega} \#\mathrm{Fix}(\omega) \\
&= \#\{(\omega, f) \,:\, \omega^f = \omega,\ \omega \in \Omega\,, f \in \mathcal{R}_W\} \\
&= \sum_{f \in \mathcal{R}_W} \#\mathrm{invar}(f) \text{ wenn } \mathrm{invar}(f) = \{\omega, \omega^f = \omega\}
\end{aligned}$$

Wir haben die Menge in der 2.Zeile auf doppelt abgezählt!

Die wichtige Formel

Wir wissen $\#(\mathcal{R}_W) = \#\mathrm{Fix}(\omega)\cdot\#\mathrm{orb}(\omega)$ für jedes ω, und wir haben auch gezeigt $\#\mathrm{Fix}(\omega) = \#\mathrm{Fix}(\omega')$ wenn $\omega' \in \mathrm{orb}(\omega)$. Also

$$\#(\mathcal{R}_W) = \sum_{\omega' \in \mathrm{orb}(\omega)} \#\mathrm{Fix}(\omega') \text{ für alle Färbungen } \omega.$$

Nun summieren wir diese Gleichung nochmal üeber alle Orbite, auch wenn wir nicht wissen, **wieviele** das sind. Aber jedes $\omega \in \Omega$ ist in genau einem Orbit!

$$\begin{aligned}\#(\mathcal{R}_W)\cdot(\text{Anzahl der Orbite}) &= \sum_{\omega\in\Omega}\#\mathrm{Fix}(\omega)\\ &= \#\{(\omega, f)\ :\ \omega^f = \omega,\ \omega\in\Omega\ , f\in\mathcal{R}_W\}\\ &= \sum_{f\in\mathcal{R}_W}\#\mathrm{invar}(f) \text{ wenn } \mathrm{invar}(f) = \{\omega, \omega^f = \omega\}\end{aligned}$$

Wir haben die Menge in der 2.Zeile auf doppelt abgezählt!
Anzahl der Färbungen $= \frac{1}{24}\sum_{f\in\mathcal{R}_W}\#\mathrm{invar}(f)$.

Das Ergebnis für k-Farben

Wir nutzen unsere genaue Kenntnis von $\mathcal{R}_W$, gleich für alle k!

Das Ergebnis für k-Farben

Wir nutzen unsere genaue Kenntnis von $\mathcal{R}_W$, gleich für alle k!

I	6 Flächen unabh.	$1 \times 1 \times k^6$

Das Ergebnis für k-Farben

Wir nutzen unsere genaue Kenntnis von $\mathcal{R}_W$, gleich für alle k!

I		6 Flächen unabh.	$1 \times 1 \times k^6$
F-F	$90^\circ, 270^\circ$	O,U,Ä (alle 4 $\equiv$) unabh.	$3 \times 2 \times k^3$

Das Ergebnis für k-Farben

Wir nutzen unsere genaue Kenntnis von $\mathcal{R}_W$, gleich für alle k!

I		6 Flächen unabh.	$1 \times 1 \times k^6$
F-F	$90^\circ, 270^\circ$	O,U,Ä (alle 4 $\equiv$) unabh.	$3 \times 2 \times k^3$
F-F	180°	O,U,V,R unabh.	$3 \times 1 \times k^4$

Das Ergebnis für k-Farben

Wir nutzen unsere genaue Kenntnis von $\mathcal{R}_W$, gleich für alle k!

I		6 Flächen unabh.	$1 \times 1 \times k^6$
F-F	$90^\circ, 270^\circ$	O,U,Ä (alle 4 $\equiv$) unabh.	$3 \times 2 \times k^3$
F-F	180°	O,U,V,R unabh.	$3 \times 1 \times k^4$
K-K	180°	$N_1 \to N_2, N_1' \to N_2', L \to R$ 3unabh.	$6 \times 1 \times k^3$

Das Ergebnis für k-Farben

Wir nutzen unsere genaue Kenntnis von $\mathcal{R}_W$, gleich für alle k!

I		6 Flächen unabh.	$1 \times 1 \times k^6$
F-F	$90^\circ, 270^\circ$	O,U,Ä (alle 4 $\equiv$) unabh.	$3 \times 2 \times k^3$
F-F	180°	O,U,V,R unabh.	$3 \times 1 \times k^4$
K-K	180°	$N_1 \to N_2, N_1' \to N_2', L \to R$ 3unabh.	$6 \times 1 \times k^3$
E-E	$120^\circ, 240^\circ$	O 3, U 3 je $\equiv$, 2Fl unabh.	$4 \times 2 \times k^2$

Das Ergebnis für k-Farben

Wir nutzen unsere genaue Kenntnis von $\mathcal{R}_W$, gleich für alle k!

I		6 Flächen unabh.	$1 \times 1 \times k^6$
F-F	$90^\circ, 270^\circ$	O,U,Ä (alle 4 $\equiv$) unabh.	$3 \times 2 \times k^3$
F-F	180°	O,U,V,R unabh.	$3 \times 1 \times k^4$
K-K	180°	$N_1 \to N_2, N_1' \to N_2', L \to R$ 3unabh.	$6 \times 1 \times k^3$
E-E	$120^\circ, 240^\circ$	O 3, U 3 je $\equiv$, 2Fl unabh.	$4 \times 2 \times k^2$

Also gibt es

$$\frac{k^6 + 3k^4 + 12k^3 + 8k^2}{24}$$

auch nach Drehung verschiedene Färbungen.