

Aufgabenserie für Klasse 11/12 zum Leipziger Auswahlseminar zur Qualifikation für die Teilnahme an der 3. Stufe der 48. Mathematikolympiade

Vorbemerkungen

Dem Bezirkskomitee Leipzig zur Förderung mathematisch-naturwissenschaftlich begabter und interessierter Schüler stehen für die in den Klassenstufen 9 – 12 sachenweit zentral ausgerichtete 3. Stufe der Mathematikolympiade (MO) maximal 30 Plätze zur Verfügung. Die Entscheidung über die Zusammensetzung der Leipziger Mannschaft fällt auf einem Auswahlseminar auf der Basis der Ergebnisse der 2. Stufe sowie der Auswahlklausur. Neben der weiteren Qualifizierung unserer Kandidaten soll damit auch die Vergleichbarkeit und Transparenz im Auswahlverfahren verbessert werden.

Sie haben sich durch Ihren Erfolg bei der zweiten Stufe der MO für diese Auswahlklausur qualifiziert, die während des **Auswahlseminars am 24. 1. 2008** geschrieben wird.

Zur Vorbereitung auf das Seminar schicken wir Ihnen heute zusammen mit der Einladung zum Auswahlseminar eine Hausaufgabenserie. Lösungen können Sie **bis zum 10. 1. 2008** an

Prof. H.-G. Gräbe, Herwigstraße 30, 04279 Leipzig

schicken. Die Lösungen werden korrigiert und während des Auswahlseminars besprochen.

Die Aufgaben

Aufgabe 1: (6 Punkte)

Gegeben sind im dreidimensionalen Raum drei Kreise, die einander paarweise in drei verschiedenen Punkten berühren., d. h., je zwei Kreise haben genau einen gemeinsamen Punkt und in diesem Punkt eine gemeinsame Tangente.

Es ist zu beweisen, dass unter diesen Voraussetzungen die drei Kreise entweder in einer Ebene oder auf der Oberfläche einer Kugel liegen.

Aufgabe 2: (6 Punkte)

Der Graph einer auf der Menge aller reellen Zahlen definierten Funktion f habe mindestens zwei Symmetriezentren.

Man beweise, dass sich f als Summe einer linearen und einer periodischen Funktion darstellen lässt.

Begriffserläuterungen: Ein Punkt P heißt Symmetriezentrum einer Figur, wenn jeder Punkt der Figur bei Spiegelung an P wieder in einen Punkt der Figur übergeht.

Eine Funktion g heißt linear, wenn es reelle Zahlen a, b so gibt, dass für alle x gilt $g(x) = ax + b$.

Eine Funktion p heißt periodisch, wenn es eine positive reelle Zahl k so gibt, dass für alle x gilt $p(x) = p(x + k)$.

Aufgabe 3: (5 Punkte)

Für ein Dreieck ABC bezeichne r den Umkreisradius, ρ den Inkreisradius, ρ_c den Radius des Ankreises an die Seite AB und γ den Innenwinkel mit Scheitelpunkt C . Man weise nach, dass gilt

$$\rho_c - \rho = 4r \sin^2 \frac{\gamma}{2}.$$

Aufgabe 4: (5 Punkte)

Man bestimme alle reellen Zahlen $x_1, x_2, \dots, x_{2009}$, für die gilt

$$x_1^2 + (x_2 - x_1)^2 + (x_3 - x_2)^2 + \dots + (x_{2009} - x_{2008})^2 + (1 - x_{2009})^2 = \frac{1}{2010}.$$

Aufgabe 5: (5 Punkte)

Die Fibonacci-Folge (a_0, a_1, a_2, \dots) wird rekursiv durch $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ und $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$ für nichtnegative ganze Zahlen n definiert. Man weise nach, dass es für jede natürliche Zahl $m \geq 2$ einen Index $k > 0$ so gibt, dass a_k durch m teilbar ist und dass a_{k+1} bei der Division durch m den Rest 1 lässt.

Bemerkung: Man kann also folgern, dass sich die Reste modulo m der Folgenglieder der Fibonacci-Folge periodisch wiederholen und dass es insbesondere unendlich viele durch m teilbare Folgenglieder gibt.

Aufgabe 6: (16 Punkte)

Eine Anordnung von Resten modulo m (also Zahlen aus $\{0, 1, \dots, m-1\}$, die als Reste bei Division durch m interpretiert werden) auf den Ecken eines regelmäßigen n -Ecks heißt Fibonacci-Kreisfolge modulo m , wenn bei Bewegung entgegengesetzt zum Uhrzeigersinn der Wert auf jeder Ecke gleich der Rest der Summe der Werte der beiden vorherigen Ecken bei Division durch m ist. Wiederholt man die Werte einer Fibonacci-Kreisfolge modulo m periodisch auf einem $2n$ -Eck, $3n$ -Eck, \dots , so entstehen wieder Fibonacci-Kreisfolgen modulo m . Wir setzen nun voraus, dass eine Fibonacci-Kreisfolge modulo m ohne periodische Wiederholungen vorliegt.

- (5 Punkte) Man weise nach, dass für Werte x, y auf zwei Ecken, die den gleichen Abstand zu einer Ecke mit dem Wert Null haben, stets $x = y$ oder $x + y = m$ ist.
- (7 Punkte) Man weise nach dass die Anzahl der Nullen einer solchen Fibonacci-Kreisfolge modulo m nur 0, 1, 2 oder 4 sein kann.
- (4 Punkte) Man gebe solche Kreisfolgen mit 0, 1, 2 bzw. 4 Nullen an.