

Die LSGM - Aufgabe des Monats

Lösung des Monats Mai 2024:

a) Die Anzahl der Reihen sei mit r benannt, die Tomatenpflanzenanzahl pro Reihe mit t . Nach der Aufgabenstellung gilt $r \geq 2$ und $t \geq 2$. Die Gesamtanzahl der Pflanzen ist $r \cdot t$, da sich in jeder der r Reihen genau t Pflanzen befinden.

Somit sind die Lösungen von $r \cdot t = 24$ gesucht.

Die Primfaktorzerlegung von 24 ist $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^3 \cdot 3^1$. Die Reihenanzahl r kann nun, da sie ein Teiler von 24 ist, den Primfaktor 2 maximal dreimal enthalten und den Primfaktor 3 maximal einmal. Weitere Primfaktoren kann r nicht enthalten.

Demnach kommen die Zahlen $2^0 \cdot 3^0 = 1$, $2^1 \cdot 3^0 = 2$, $2^2 \cdot 3^0 = 4$, $2^3 \cdot 3^0 = 8$, $2^0 \cdot 3^1 = 3$, $2^1 \cdot 3^1 = 6$, $2^2 \cdot 3^1 = 12$ und $2^3 \cdot 3^1 = 24$ für r in Frage. Die Möglichkeiten $r = 1$ und $r = 24$ entfallen, da $r \geq 2$ und $t = \frac{24}{r} \geq 2$ gilt.

Damit gibt es genau 6 Möglichkeiten die 24 Tomatenpflanzen zu pflanzen:

Reihenanzahl r	Tomatenpflanzen pro Reihe $t = \frac{24}{r}$
2	12
3	8
4	6
6	4
8	3
12	2

b) Die fünf kleinsten solchen Zahlen sind 2, 3, 5, 7 und 11. Der gesuchte Zahlenbereich sind die Primzahlen.

Eine mögliche Definition ist:

Primzahlen sind natürliche Zahlen, welche genau zwei verschiedene Teiler besitzen.

c) Die Tomatenpflanzenanzahlen 4, 9, 25, 49, 121 und 169 erfüllen beispielsweise die Aufgabenstellung.

Es sei n die Tomatenpflanzenanzahl. Die Reihenanzahl r muss ein echter Teiler, das heißt ein Teiler welcher ungleich 1 und ungleich der Zahl selbst ist, von n sein, damit die Darstellung $n = r \cdot t$ existiert. Da diese Darstellung eindeutig ist, gibt es genau einen echten Teiler von n .

Dieser Teiler muss eine Primzahl p sein, da sonst die echten Teiler dieses Teilers wieder echte Teiler von n wären. Die Zahl $\frac{n}{p}$ muss gleich p sein, da es sonst ein weiterer echter Teiler von n ist.

Demnach erfüllen genau die Zahlen $n = p^2$, also Quadrate von Primzahlen, die Bedingung, dass genau eine Anordnung der Tomatenpflanzen möglich ist.