

# Die LSGM - Aufgabe des Monats

Lösung des Monats Mai 2024:

a) Die Anzahl der Reihen sei mit  $r$  benannt, die Tomatenpflanzenanzahl pro Reihe mit  $t$ . Nach der Aufgabenstellung gilt  $r \geq 2$  und  $t \geq 2$ . Die Gesamtanzahl der Pflanzen ist  $r \cdot t$ , da sich in jeder der  $r$  Reihen genau  $t$  Pflanzen befinden.

Somit sind die Lösungen von  $r \cdot t = 24$  gesucht.

Die Primfaktorzerlegung von 24 ist  $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^3 \cdot 3^1$ . Die Reihenanzahl  $r$  kann nun, da sie ein Teiler von 24 ist, den Primfaktor 2 maximal dreimal enthalten und den Primfaktor 3 maximal einmal. Weitere Primfaktoren kann  $r$  nicht enthalten.

Demnach kommen die Zahlen  $2^0 \cdot 3^0 = 1$ ,  $2^1 \cdot 3^0 = 2$ ,  $2^2 \cdot 3^0 = 4$ ,  $2^3 \cdot 3^0 = 8$ ,  $2^0 \cdot 3^1 = 3$ ,  $2^1 \cdot 3^1 = 6$ ,  $2^2 \cdot 3^1 = 12$  und  $2^3 \cdot 3^1 = 24$  für  $r$  in Frage. Die Möglichkeiten  $r = 1$  und  $r = 24$  entfallen, da  $r \geq 2$  und  $t = \frac{24}{r} \geq 2$  gilt.

Damit gibt es genau 6 Möglichkeiten die 24 Tomatenpflanzen zu pflanzen:

Reihenanzahl $r$	Tomatenpflanzen pro Reihe $t = \frac{24}{r}$
2	12
3	8
4	6
6	4
8	3
12	2

b) Die fünf kleinsten solchen Zahlen sind 2, 3, 5, 7 und 11. Der gesuchte Zahlenbereich sind die Primzahlen.

Eine mögliche Definition ist:

Primzahlen sind natürliche Zahlen, welche genau zwei verschiedene Teiler besitzen.

c) Die Tomatenpflanzenanzahlen 4, 9, 25, 49, 121 und 169 erfüllen beispielsweise die Aufgabenstellung.

Es sei  $n$  die Tomatenpflanzenanzahl. Die Reihenanzahl  $r$  muss ein echter Teiler, das heißt ein Teiler welcher ungleich 1 und ungleich der Zahl selbst ist, von  $n$  sein, damit die Darstellung  $n = r \cdot t$  existiert. Da diese Darstellung eindeutig ist, gibt es genau einen echten Teiler von  $n$ .

Dieser Teiler muss eine Primzahl  $p$  sein, da sonst die echten Teiler dieses Teilers wieder echte Teiler von  $n$  wären. Die Zahl  $\frac{n}{p}$  muss gleich  $p$  sein, da es sonst ein weiterer echter Teiler von  $n$  ist.

Demnach erfüllen genau die Zahlen  $n = p^2$ , also Quadrate von Primzahlen, die Bedingung, dass genau eine Anordnung der Tomatenpflanzen möglich ist.