

Die LSGM - Aufgabe des Monats

Lösung des Monats November 2016:

a) Die Wendeltreppe kann sich entweder in dieselbe Richtung wie die Fenster winden oder in die andere. In jedem Fall kann man eine ganze Wendung ohne Fenster oder sogar mehrere Wendungen ohne Fenster zwischen zwei Fenstern vermuten. Die geringsten Möglichkeiten sind also: Eine Viertel Wendung, falls sich die Treppe ebenso wie die Fenster windet und keine Windung ohne Fenster vorkommt, eine Dreiviertel Wendung, wenn sich die Treppe andersherum windet und keine Wendung ohne Fenster vorkommt sowie $1\frac{1}{4}$ und $1\frac{3}{4}$ Wendungen wenn jeweils eine Wendung ohne Fenster vorkommt.

b) Jede Wendung ist also $25 \cdot 20\text{cm} = 5\text{m}$ hoch. Es gibt 16 Abstände zwischen Fenstern. Also gilt für die verschiedenen Möglichkeiten:

Wendungen pro Fenster	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$1\frac{1}{4}$	$1\frac{3}{4}$
Höhe des Fensterabschnittes	20 m	60 m	100 m	140 m

Sonia läuft in den ersten 40 Sekunden 80 Stufen und in den verbleibenden 336 Sekunden 336 Stufen, also insgesamt 416 Stufen bzw. 104 Meter. Es gibt also $\frac{104}{5} = 20\frac{4}{5}$ Wendungen.

c) Damit ergibt sich für die verschiedenen Möglichkeiten aus a) folgendes:

Wendungen pro Fenster	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$1\frac{1}{4}$	$1\frac{3}{4}$
Höhe des Fensterabschnittes	20 m	60 m	100 m	140 m
Anzahl der Wendungen im Fensterabschnitt	4	12	20	28
Stufen des Fensterabschnittes	80	240	400	560

Da der Turm insgesamt weniger als 21 Wendungen hat, ist die letzte Möglichkeit ausgeschlossen. Die Höhe des untersten Fensters kann wie folgt berechnet werden: Stufen der Treppe minus acht Stufen nach den Fenstern minus Stufenanzahl des Fensterabschnittes mal 20 cm. Es ergibt sich:

Wendungen pro Fenster	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$1\frac{1}{4}$
Stufen des Fensterabschnittes	80	240	400
Höhe unterstes Fenster	65,6 m	33,6 m	1,6 m

Sonia läuft 80 Stufen nach unten, die ersten acht sind der fensterlose Abschnitt. In den folgenden 72 Stufen kommt sie an fünf Fenstern vorbei. Für die verbleibenden Möglichkeiten gilt aber:

Wendungen pro Fenster	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$1\frac{1}{4}$
Stufen pro Fenster	5	15	25
Stufen pro 5 Fenster	25	75	125

Die erste Möglichkeit ist damit ausgeschlossen, da schon beim Steigen von 30 Stufen sechs Fenster auftauchen hätten müssen; die dritte Möglichkeit ist ausgeschlossen, da für fünf Fenster mehr als 72 Stufen gestiegen werden müssten. Damit gilt die zweite Möglichkeit und das unterste Fenster liegt in einer Höhe von 33,6 m.