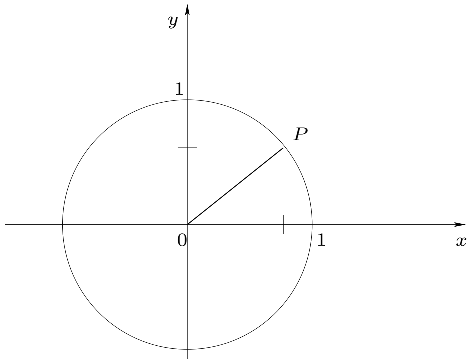
Von Winkelfunktionen zur Dreiecksgeometrie

Jens Wirth, Freiberg
wirth@math.tu-freiberg.de

1 Definition



Es sei P ein Punkt auf dem Einheitskreis, $\angle 10P = \phi$. Dann besitzt P die Koordinaten $(\cos(\phi), \sin(\phi))$. Dies kann man nutzen, um durch periodische Fortsetzung auf ganz $\mathbb{R}$ die Funktionen $\sin(\phi)$ und $\cos(\phi)$ zu definieren.

Mit dem Satz des Pythagoras gilt offensichtlich $|oP|^2 = 1 = \sin^2(\phi) + \cos^2(\phi)$. Diese Formel wird als trigonometrischer Pythagoras bezeichnet.

Übung 1 *Man skizziere die Funktionen* $\sin(\phi)$ *und* $\cos(\phi)$. *Dabei verwende man zum Messen von Winkeln die Konvention, dass ein rechter Winkel das Maß* $\frac{\pi}{2}$ *hat.*

Übung 2 *Man „beweise“, dass*

$$\cos(\phi) = \sin(\phi + \frac{\pi}{2}), \qquad \cos(\phi) = \cos(-\phi) \qquad \textit{und} \qquad \sin(\phi) = -\sin(-\phi)$$

gelten.

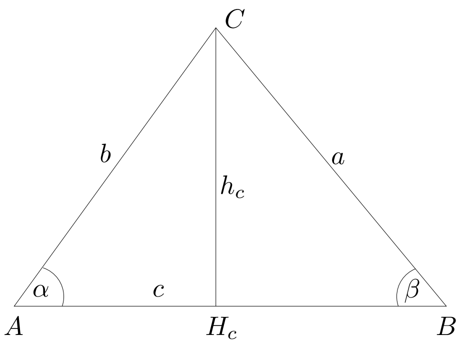
2 Dreiecksberechnung mit Winkelfunktionen

Wie der Name schon vermuten lässt, eignen sich trigonometrische Funktionen in besonderer Weise zur Berechnung von und in Dreiecken. In rechtwinkligen Dreiecken ABC mit $|\angle ABC| = \frac{\pi}{2}$ gilt (schon allein wegen der Ähnlichkeit zu einem Dreieck mit $|AC| = 1$ und der Definition der Winkelfunktionen)

$$c = b\,\cos(\alpha) \quad \text{und} \quad a = b\,\sin(\alpha),$$

wobei wir wie üblich die Bezeichnungen $a = |BC|$ und $\alpha = |\angle CAB|$ usw. verwenden. Uns interessieren aber Formeln die in allen Dreiecken gelten.

2.1 Erweiterter Sinussatz



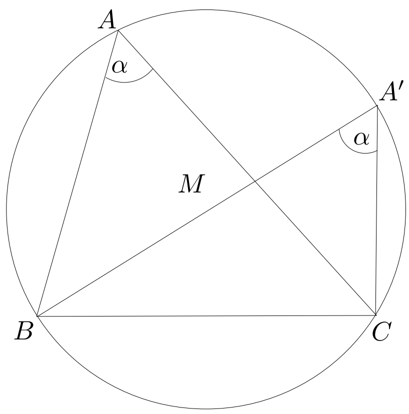
Ein allgemeines Dreieck wird durch die Höhe in rechtwinklige Teildreiecke zerlegt. Es gilt also insbesondere

$$b\,\sin(\alpha) = h_c = a\,\sin(\beta)$$

und damit

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}\,.$$

Frage: Welchen Wert hat $\frac{a}{\sin(\alpha)}$ am allgemeinen Dreieck? Wir suchen eine geometrische Interpretation.



Sei o.B.d.A. $\alpha < \frac{\pi}{2}$. Dann können wir nach dem Peripheriewinkelsatz A auf dem Umkreis des Dreiecks ABC verschieben, ohne α (und a) zu ändern. Wählen wir A' so, dass $|\angle\, BCA| = \frac{\pi}{2}$ ein rechter Winkel ist. Dann gilt mit der Umkehrung vom Satz des Thales für den Umkreismittelpunkt $M \in \overline{BA'}$ und somit

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \left|A'B\right| = 2\,R\,,$$

wobei R der Umkreisradius des Dreiecks ist.

Es gilt also der erweiterte Sinussatz

$$\boxed{\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)} = 2\,R.}$$

2.2 Additionstheoreme I

Die Innenwinkel im Dreieck erfüllen $\alpha + \beta + \gamma = \pi$. Damit ergeben sich auf elementare Weise „Additionstheoreme“ für Winkelfunktionen

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\pi - \alpha - \beta) = \sin(\gamma)$$

und entsprechend

$$\cos(\alpha + \beta) = -\cos(\gamma)$$

unter der Nebenbedingung $\alpha + \beta < \pi$. Um dies schöner zu gestalten, wenden wir den erweiterten Sinussatz an. Es gilt

$$2\,R\,\sin(\gamma) = c = |AH_c| + |BH_c| = b\,\cos(\alpha) + a\,\cos(\beta) = 2\,R\,(\sin(\beta)\,\cos(\alpha) + \sin(\alpha)\,\cos(\beta))$$

wobei H_c der entsprechende Höhenfußpunkt ist. Wir haben also

$$\boxed{\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\,\cos(\beta) + \sin(\beta)\,\cos(\alpha)}$$

bewiesen.
Insbesondere ergibt sich die Doppelwinkelformel

$$\boxed{\sin(2\,\alpha) = 2\,\sin(\alpha)\,\cos(\alpha).}$$

Um entsprechende Beziehungen für den Cosinus zu bekommen, müssen wir entweder verstehen, warum das Additionstheorem für *alle* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt, oder eine bessere geometrische Interpretation für den Cosinus finden. Wir werden letzteres tun. An der Stelle soll nur vorab auf die Doppelwinkelformel für den Cosinus hingewiesen werden. Es gilt

$$\boxed{\cos(2\,\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) = 2\cos^2(\alpha) - 1.}$$

Ein Beweis erfolgt in Abschnitt 2.7.

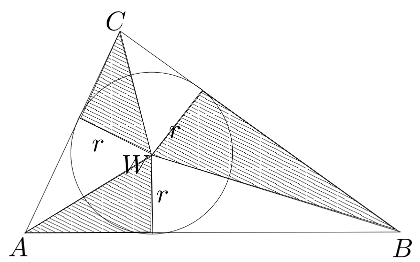
2.3 Flächeninhalt

Auch der Flächeninhalt ist eine Invariante des Dreiecks. Wir wollen die „unsymmetrischen“ Formel $A = \frac{1}{2}\,a\,h_a$ umformen. Es gilt $A = \frac{1}{2}\,a\,h_a = \frac{1}{2}\,a\,b\,\sin(\gamma)$ und wegen dem erweiterten Sinussatz $a\,b = 4\,R^2\,\sin(\alpha)\,\sin(\beta)$. Somit ergibt sich

$$\boxed{A = 2\,R^2\sin(\alpha)\,\sin(\beta)\,\sin(\gamma) = \frac{a\,b\,c}{4\,R}.}$$

2.4 Zusammenhang zu Inkreisradius und Umfang

Der Inkreismittelpunkt ist der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden. Diese zerlegen wie in der Skizze das Dreieck in drei Teilflächen ABW, BCW und CAW, die Höhen der Teildreiecke sind jeweils die Radien des Inkreises. Damit ergibt sich eine einfache Flächenformel



$$\boxed{A = p\,r,}$$

in der $p = \frac{1}{2}\,(a+b+c)$ der halbe Umfang des Dreiecks ist.
Mit dem Sinussatz

$$a = 2\,R\,\sin(\alpha), \quad b = 2\,R\,\sin(\beta), \quad c = 2\,R\,\sin(\gamma)$$

folgt

$$\boxed{p = R\,(\sin(\alpha) + \sin(\beta) + \sin(\gamma)),}$$

was sich mit den Doppelwinkelformeln

$$\sin(\alpha) = 2\,\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\,\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \quad \text{und} \quad \cos(\alpha) = 2\,\cos^2\left(\frac{\beta}{2}\right) - 1$$

über die Zwischenschritte

$$
\begin{aligned}
&= R\,(\sin(\alpha) + \sin(\beta) + \sin(\alpha+\beta)) \\
&= R\,(\sin(\alpha) + \sin(\beta) + \sin(\alpha)\ \cos(\beta) + \sin(\beta)\ \cos(\alpha)) \\
&= R\,(\sin(\alpha\,(1+\cos(\beta) + \sin(\beta\,(1+\cos(\alpha)) \\
&= 4\,R\left(\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\ \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\ \cos^2\left(\frac{\beta}{2}\right) + \sin\left(\frac{\beta}{2}\right)\ \cos\left(\frac{\beta}{2}\right)\ \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right) \\
&= 4\,R\ \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\ \cos\left(\frac{\beta}{2}\right)\ \left(\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\ \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) + \sin\left(\frac{\beta}{2}\right)\ \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right) \\
&= 4\,R\ \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\ \cos\left(\frac{\beta}{2}\right)\ \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = 4\,R\ \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\ \cos\left(\frac{\beta}{2}\right)\ \cos\left(\frac{\gamma}{2}\right)
\end{aligned}
$$

umformen lässt in

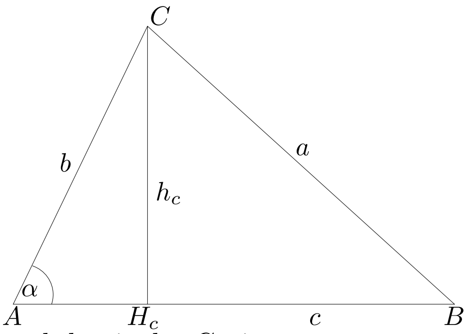
$$\boxed{p = 4\,R\ \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\ \cos\left(\frac{\beta}{2}\right)\ \cos\left(\frac{\gamma}{2}\right)}$$

und mit $A = p\,r$ in

$$\boxed{r = 4\,R\ \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\ \sin\left(\frac{\beta}{2}\right)\ \sin\left(\frac{\gamma}{2}\right).}$$

2.5 Cosinussatz

Etwas aus der Rolle fällt der Cosinussatz, er ist unsymmetrisch, soll aber trotzdem nicht unerwähnt bleiben.



Es gilt mit dem Satz des Pythagoras

$$
\begin{aligned}
a^2 &= h_c^2 + |H_cB|^2 \\
&= b^2 - |AH_c|^2 + |H_cB|^2 \\
&= b^2 + (c - |AH_c|)^2 - |AH_c|^2 \\
&= b^2 + c^2 - 2c\,|AH_c|
\end{aligned}
$$

und damit der Cosinussatz

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c\cos(\alpha).}$$

Der Cosinussatz ist nichts wirklich Neues. Er ergibt sich wie so vieles aus dem Sinussatz, wie folgende Übung zeigt (zeigen soll).

Übung 3 *Man folgere den Cosinussatz aus dem Sinussatz und dem trigonometrischen Pythagoras (als „Definition“ der Cosinus-Funktion).*

2.6 Höhen und Höhenabschnitte

Die Höhen eines Dreiecks erfüllen

$$h_c = b\ \sin(\alpha) = 2\,R\ \sin(\alpha)\ \sin(\beta).$$

Führt man die halbe Höhensumme als neue Hilfsgröße ein, so ergibt sich damit

$$q = \frac{1}{2}\,(h_a + h_b + h_c) = R\,(\sin(\alpha)\,\sin(\beta) + \sin(\beta)\,\sin(\gamma) + \sin(\gamma)\,\sin(\alpha))\,.$$

Mit den Formeln aus Abschnitt 2.3 und 2.4 erhält man damit

$$\begin{aligned}\frac{A}{2\,R^2} &= \sin(\alpha)\,\sin(\beta)\,\sin(\gamma),\\ \frac{q}{R} &= \sin(\alpha)\,\sin(\beta) + \sin(\beta)\,\sin(\gamma) + \sin(\gamma)\,\sin(\alpha),\\ \frac{p}{R} &= \sin(\alpha) + \sin(\beta) + \sin(\gamma).\end{aligned}$$

Ähnliche Beziehungen gelten auch für die Cosini der Winkel. Aufgabe 1 a) macht deutlich, dass für die Höhenabschnitte die Beziehungen

$$|AH| = 2\,R\,\cos(\alpha), \quad |BH| = 2\,R\,\cos(\beta), \quad |CH| = 2\,R\,\cos(\gamma),$$

und

$$|HH_a| = 2\,R\,\cos(\beta)\,\cos(\gamma), \quad |HH_b| = 2\,R\,\cos(\gamma)\,\cos(\alpha), \quad |HH_c| = 2\,R\,\cos(\alpha)\,\cos(\beta)$$

gelten.
Insbesondere ist das Produkt der Höhenabschnitte konstant,

$$\boxed{|AH|\,|HH_a| = |BH|\,|HH_b| = |CH|\,|HH_c| = 4\,R^2\,\cos(\alpha)\,\cos(\beta)\,\cos(\gamma).}$$

2.7 Additionstheoreme II

Wir gehen wieder vor wie in Abschnitt 2.2, ersetzen nur den erweiterten Sinussatz durch die Formeln aus dem vorigen Abschnitt. Es gilt

$$\begin{aligned}2\,R\,\cos(\gamma) &= |CH| = |CH_c| - |HH_c|\\ &= b\,\sin(\alpha) - 2\,R\,\cos(\alpha)\,\cos(\beta)\\ &= 2\,R\,(\sin(\alpha)\,\sin(\beta) - \cos(\alpha)\,\cos(\beta))\end{aligned}$$

und damit

$$\boxed{\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\,\cos(\beta) - \sin(\alpha)\,\sin(\beta),}$$

vorausgesetzt, dass $\alpha + \beta < \pi$ ist.

Übung 4 *Man komplettiere den Beweis durch jeweils eine Skizze für den Fall $\gamma < \frac{\pi}{2}$ und $\gamma > \frac{\pi}{2}$.*

3 Aufgaben

Aufgabe 1 Man zeige in einem Dreieck ABC (mit den üblichen Bezeichnungen) die folgenden Beziehungen:

a)
$$|AH| = 2\,R\,\cos(\alpha), \qquad |HH_a| = 2\,R\,\cos(\beta)\,\cos(\gamma)$$
für den Höhenschnittpunkt H und den Höhenfußpunkt $H_a \in BC$.

b) Der Fußpunkt der Winkelhalbierenden AW_a teilt die Seite $\overline{BC}$ im Verhältnis $\sin(\gamma) : \sin(\beta)$.

c)
$$\frac{\sin(\alpha) + \sin(\beta) + \sin(\gamma)}{\sin(\alpha)\,\sin(\beta)\,\sin(\gamma)} = 2\,\frac{R}{r}$$

d) ($\sqrt{\text{WURZEL}}$, ι31)
$$R\,(\cos(\alpha) + \cos(\beta) + \cos(\gamma)) = R + r\,.$$

Aufgabe 2 (A411345,[3])
Man beweise, dass ein Dreieck genau dann rechtwinklig ist, wenn für seine Innenwinkel α, β und γ
$$\frac{\sin^2(\alpha) + \sin^2(\beta) + \sin^2(\gamma)}{\cos^2(\alpha) + \cos^2(\beta) + \cos^2(\gamma)} = 2$$
gilt.

Aufgabe 3 In einem Dreieck ABC gelten stets die folgenden drei Ungleichungen

a)
$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\gamma}{2}\right) \le \frac{1}{8}$$

b)
$$\frac{1}{2} \le \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\gamma}{2}\right) \le \frac{3}{4}\sqrt{3}$$

c)
$$0 < \sin(\alpha) + \sin(\beta) + \sin(\gamma) \le \frac{3}{2}\sqrt{3}$$

Aufgabe 4 (A171335, [1] A85)
Man beweise folgenden Satz:
Sind u den Umfang, R der Umkreis- und r der Inkreisradius des Dreiecks ABC, so gilt
$$R > \frac{1}{3}\sqrt{3}\,\sqrt{u\,r}.$$
Ist das Dreieck insbesondere rechtwinklig, so gilt sogar
$$R \ge \frac{1}{2}\sqrt{2}\,\sqrt{u\,r}.$$

Aufgabe 5 Die durch die Fußpunkte der Dreieckstransversalen gebildeten Dreiecke werden als Fußpunktdreiecke bezeichnet. Die Transversalen des Ausgangsdreicks sind dann wieder (andere) Transversalen des Fußpunktdreiecks. So sind die Seitenhalbierenden eines Dreiecks gleichzeitig Seitenhalbierende seines Mittendreiecks.

Man zeige: Die Höhen eines Dreiecks ABC bilden Winkelhalbierende seines Höhenfußpunktdreiecks $H_aH_bH_c$.

Aufgabe 6 Der Umkreis des Höhenfußpunktdreiecks hat den Radius $\frac{1}{2}R$.

Literatur

[1] Mathematischer Lesebogen „Junge Mathematiker“, Heft 80
Bezirkskabinett für außerunterrichtliche Tätigkeit, Rat des Bezirkes Leipzig, 1987

[2] WURZEL, 5/97, `http://www.wurzel.org`

[3] `http://www.mathematik-olympiaden.de`

Comments

to do: convert pictures

Attribution Section

wirth (Dec 2004): Contributed to KoSemNet
graebe (2005-02-11): Prepared along the KoSemNet rules