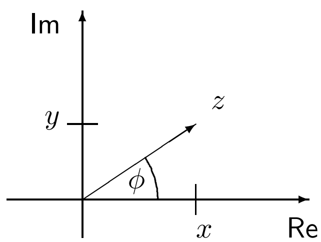
Trigonometrische Funktionen

Jens Wirth, Freiberg
wirth@math.tu-freiberg.de

1 Bezeichnungen, komplexe Zahlen

Im folgenden bezeichnet $\mathbb{C}$ die Menge der komplexen Zahlen $z = x + \mathrm{i}\,y$ mit $x, y \in \mathbb{R}$, $\mathrm{i}^2 = -1$. Die Zahl $x = \mathsf{Re}\, z$ bezeichnet den Realteil, $y = \mathsf{Im}\, z$ den Imaginärteil von z.



Weitere wichtige Begriffe sind

- $\phi = \arg z$, das Argument von z
- $\overline{z} = x - \mathrm{i}\,y$, die zu z konjugierte Zahl
- $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\overline{z}}$, der Betrag von z

Ein wichtiges Hilfsmittel ist die für alle komplexen Zahlen definierte Exponentialfunktion

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}, \qquad e^1 = e, \qquad e^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{2}} = \mathrm{i}\,. \tag{1}$$

Damit gilt für jede komplexe Zahl z

$$z = |z|\, e^{\mathrm{i}\,\arg z}, \tag{2}$$

beziehungsweise dazu äquivalent der folgende Satz.

Satz 1 **[Eulersche Relation]**

$$e^{\mathrm{i}\,\phi} = \cos\phi + \mathrm{i}\,\sin\phi, \qquad \phi \in \mathbb{R} \tag{3}$$

2 Anwendung 1: Additionstheoreme für Winkelfunktionen

Satz 1 ist ein wichtiges Hilfsmittel um Beziehungen zwischen Winkelfunktionen zu verstehen. Zum Aufwärmen deshalb eine erste Anwendung.

Wir versuchen die bekannten Additionstheoreme für sin und cos abzuleiten, der Bequemlichkeit halber beide gleichzeitig. Es gilt

$$\begin{aligned}\cos(\phi+\psi) + \mathrm{i}\,\sin(\phi+\psi) &= e^{\mathrm{i}\,(\phi+\psi)} = e^{\mathrm{i}\,\phi}e^{\mathrm{i}\,\psi}\\ &=(\cos\phi + \mathrm{i}\,\sin\phi)(\cos\psi + \mathrm{i}\,\sin\psi)\\ &=(\cos\phi\,\cos\psi - \sin\phi\,\sin\psi) + \mathrm{i}\,(\sin\phi\,\cos\psi + \cos\phi\,\sin\psi)\end{aligned} \tag{4}$$

und ein Vergleich der Real- und Imaginärteile ergibt die gesuchten Beziehungen.

Übung 1 *Man nutze die Additionstheoreme um die Beziehungen*

$$\begin{aligned}\sin\phi + \sin\psi &= 2\sin\frac{\phi+\psi}{2}\,\cos\frac{\phi-\psi}{2}\\ \cos\phi + \cos\psi &= 2\cos\frac{\phi+\psi}{2}\,\cos\frac{\phi-\psi}{2}\\ \cos\phi - \cos\psi &= -2\sin\frac{\phi+\psi}{2}\,\sin\frac{\phi-\psi}{2}\end{aligned} \tag{5}$$

abzuleiten!

Komplexe Zahlen sind auch gut geeignet, Probleme der ebenen Geometrie zu behandeln.

Übung 2 *Man nutze komplexe Zahlen um einen Beweis des Cosinussatzes*

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\angle(a,b)$$

für ein Dreieck mit den Seiten a, b, c zu finden.

3 Anwendung 2: Winkelvielfache

Aufgrund der Additionstheoreme gilt

$$\cos 2\phi = 2\cos^2\phi - 1 \tag{6}$$

$$\sin 2\phi = 2\sin\phi\,\cos\phi. \tag{7}$$

Wir wollen eine entsprechende Relation für allgemeine ganzzahlige Vielfache suchen. Auch hier hilft wiederum Satz 1. Es gilt

$$\begin{aligned}cos(n\phi) + \mathrm{i}\,\sin(n\phi) = \left(e^{\mathrm{i}\,\phi}\right)^n &= (\cos\phi + \mathrm{i}\,\sin\phi)^n\\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\mathrm{i}^{\,k}\cos^{n-k}\phi\,\sin^k\phi.\end{aligned}$$

Interessiert man sich nur für $\cos(n\phi)$, so haben wir den Realteil zu bestimmen. Dazu setzen wir $k = 2l$ und erhalten

$$\begin{aligned}
\cos(n\phi) &= \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2l} (-1)^l \cos^{n-2l}\phi \, \sin^{2l}\phi \\
&= \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2l} (-1)^l \cos^{n-2l}\phi \, (1 - \cos^2\phi)^l \\
&= \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \sum_{k=0}^{l} \binom{n}{2l} \binom{l}{k} (-1)^{l+k} \cos^{n-2l+2k}\phi.
\end{aligned}$$

Die Funktion $\cos(n\phi)$ ist also insbesondere ein Polynom in $\cos\phi$. Dieses Polynom T_n hat den Grad n und wird als Tschebyscheff-Polynom n-ter Ordnung bezeichnet. Es gilt

$$\cos(n\phi) = T_n(\cos\phi). \tag{8}$$

Die Tschebyscheff-Polynome bis zur Ordnung 5 sind

$$1, \;\; x, \;\; 2x^2 - 1, \;\; 4x^3 - 3x, \;\; 8x^4 - 8x^2 + 1, \;\; 16x^5 - 20x^3 + 5x. \tag{9}$$

Übung 3 *Eine ähnliche Betrachtung für Vielfache des Sinus ist möglich. Allerdings sind nur die ungeraden Vielfachen als Polynome in* $\sin\phi$ *darstellbar, die geraden enthalten* $\cos\phi$ *als Faktor.*
Üblich ist eine andere Vorgehensweise. Man eliminiert so viele sin*-Potenzen wie möglich (d.h. alle bis auf eine) und schreibt*

$$\sin(n\phi) = \sin(\phi)\, U_{n-1}(\cos\phi) \tag{10}$$

mit dem Tschebyscheff-Polynom n*-ter Ordnung und zweiter Art* U_n*.*

Übung 4 *Der höchste Koeffizient der Tschebyscheff-Polynome* T_{n+1} *und* U_n *ist* 2^n *für alle* $n \geq 0$*.*

4 Regelmäßige n-Ecke und Nullstellen von T_n

Wir suchen nach einer Interpretation der Nullstellen des Polynoms T_n. Das sind gerade die Werte $\cos\phi$, für die $\cos(n\phi) = 0$ gilt, d.h. $n\phi = \frac{\pi}{2} + k\pi$. Es genügt nach denjenigen ϕ zu suchen, die in einem Monotonie-Intervall der Cosinus-Funktion liegen. Das sind im Intervall $[0, \pi]$

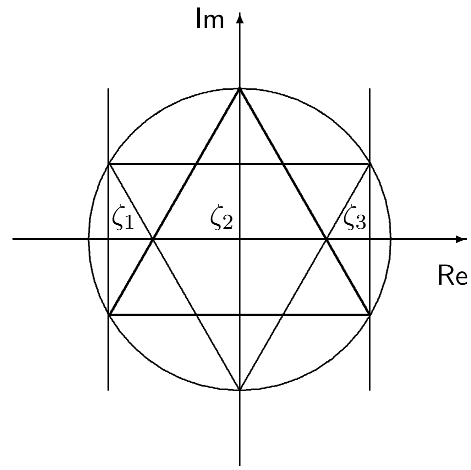
$$\frac{\pi}{2n}, \;\; \frac{3\pi}{2n}, \;\; \frac{5\pi}{2n}, \;\; \ldots, \;\; \frac{(2n-1)\pi}{2n}. \tag{11}$$

Diese sind paarweise verschieden. Da es n Stück sind, handelt sich bei den betreffenden Cosinus-Werten

$$\cos\left(\frac{1}{2n}\pi\right), \;\; \cos\left(\frac{3}{2n}\pi\right), \;\; \ldots, \;\; \cos\left(\frac{2n-1}{2n}\pi\right) \tag{12}$$

um alle Nullstellen von T_n.

Übung 5 *Diese Werte lassen sich als x-Koordinaten der Eckpunkte eines regelmäßigen $2n$-Ecks deuten. Wie und warum? (vgl. Skizze)*



5 Trigonometrische Polynome

Ein Ausdruck der Form

$$f(x) = a + \sum_{k=1}^{n} \big(b_k \sin kx + c_k \cos kx\big) \tag{13}$$

wird als trigonometrisches Polynom bezeichnet.

Satz 2 *Eine Funktion $f(x)$ ist ein trigonometrisches Polynom genau dann, wenn sie sich als Polynom $f(x) = P(\cos x, \sin x)$ schreiben lässt.*

Übung 6 *Man schreibe $f(x) = \cos^5 x$ als trigonometrisches Polynom!*

Übung 7 *Man beweise Satz 2, indem man einen Algorithmus zur Bestimmung des Polynoms P angibt!*

Übung 8 *Das Polynom P in Satz 2 ist nicht eindeutig bestimmt. Vielmehr lässt sich immer die (dann eindeutig bestimmte) Struktur*

$$f(x) = P_1(\cos x) + \sin x\, P_2(\cos x) \tag{14}$$

erzeugen. Welche Forderung muss man an die Koeffizienten a, b_k, c_k in (13) Stellen, dass $P_2 \equiv 0$ gilt?

6 Aufgabensammlung

Aufgabe 1 (391333A, [4])
Es seien α,β und γ nichtnegative Zahlen mit $\alpha + \beta + \gamma \le 2\pi$.
Beweisen Sie

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \ge \cos(\alpha + \beta) + \cos(\beta + \gamma) + \cos(\gamma + \alpha).$$

In welchen Fällen gilt Gleichheit?

Aufgabe 2 (61236, [2, A 24])
Die Zahl $\sin\left(\frac{\pi}{18}\right)$ genügt einer Gleichung dritten Grades mit ganzzahligen Koeffizienten. Man stelle diese (bis auf einen gemeinsamen Teiler aller Koeffizienten eindeutig bestimmte) Gleichung auf und ermittle ihre beiden anderen Wurzeln.

Aufgabe 3
a) Man berechne den Wert von $\cos \frac{\pi}{5}$.
b) Gesucht ist ein Algorithmus zur Konstruktion eines regelmäßigen 10-Ecks mit Zirkel und Lineal.

Aufgabe 4 (71232, [2, A 25])
Es ist das Produkt

$$\sin 5^\circ \sin 15^\circ \sin 25^\circ \sin 35^\circ \sin 45^\circ \sin 55^\circ \sin 65^\circ \sin 75^\circ \sin 85^\circ$$

in einen Ausdruck umzuformen, der aus natürlichen Zahlen lediglich durch Anwendung der Rechenoperationen des Addierens, Subtrahierens, Multiplizierens, Dividierens sowie des Radizierens mit natürlichen Wurzelexponenten gebildet werden kann.
(Beispiel dafür $\sin 30^\circ \ \sin 60^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{3}$)

Aufgabe 5 ($\sqrt{\text{WURZEL}}$, $\delta 19$)
Man bestimme alle reellen x mit

$$4\cos x \ \cos 2x \ \cos 5x + 1 = 0.$$

Aufgabe 6
Man beweise die Relation

$$8\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)\cos\left(\frac{5\pi}{8}\right)\cos\left(\frac{7\pi}{8}\right) = 1.$$

Literatur

[1] Herbert Pieper: Die komplexen Zahlen
VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1988

[2] Mathematischer Lesebogen „Junge Mathematiker“, Heft 80
Bezirkskabinett für außerunterrichtliche Tätigkeit, Rat des Bezirkes Leipzig, 1987

[3] $\sqrt{\text{WURZEL}}$, 5/97, `http://www.wurzel.org`

[4] `http://www.mathematik-olympiaden.de`

Attribution Section

wirth (Dec 2004): Contributed to KoSemNet

graebe (2005-01-05): Prepared along the KoSemNet rules