Funktionen in der Zahlentheorie

Gunter Semmler, Freiberg
semmler@math.tu-freiberg.de

1 Die Funktion [ ]

Die *Gaußklammer* oder *Integerfunktion* ordnet jeder reellen Zahl x die größte ganze Zahl zu, die höchstens so groß ist wie x. Schreibt man dafür $[x]$, so gilt demzufolge

$$[x] \leq x < [x] + 1.$$

Theorem 1 *Sei n ganz und positiv. Der Exponent einer Primzahl p in der Primfaktorzerlegung von $n!$ ist*

$$\left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \left[\frac{n}{p^3}\right] + \dots$$

Beweis:

$\left[\frac{n}{p}\right]$ der Zahlen $1, \dots, n$ sind durch p teilbar.

$\left[\frac{n}{p^2}\right]$ der Zahlen $1, \dots, n$ sind durch p^2 teilbar.

$$\vdots \quad \Box$$

2 Multiplikative Funktionen

Eine für alle positiven ganzen Zahlen definierte Funktion ϑ heißt *multiplikativ*, wenn für teilerfremde a_1, a_2 stets

$$\vartheta(a_1 a_2) = \vartheta(a_1)\vartheta(a_2) \tag{1}$$

gilt.
Beispiel: $\vartheta(a) = a^s, s \in \mathbb{C}$
Eigenschaften multiplikativer Funktionen:

- $\vartheta(1) = 1$
- $\vartheta(a_1 \cdots a_n) = \vartheta(a_1) \cdots \vartheta(a_n)$, falls $a_1, \cdots, a_n$ paarweise teilerfremd sind.

- Ist $a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$ kanonische Zerlegung[1] von a, so gilt

$$\vartheta(p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}) = \vartheta(p_k^{\alpha_1}) \cdots \vartheta(p_k^{\alpha_k}) \tag{2}$$

  ,

- Man erhält immer eine multiplikative Funktion, wenn man $\vartheta(1) = 1$ und $\vartheta(p^\alpha)$ $(\alpha > 0)$ beliebig setzt und ϑ für alle anderen positiven ganzen Zahlen durch (2) erklärt.

- Das Produkt multiplikativer Funktionen ist wieder multiplikativ.

Theorem 2 *Ist $a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$ kanonische Zerlegung von a so gilt*

$$\sum_{d|a} \vartheta(d) = (1 + \vartheta(p_1) + \vartheta(p_1^2) + \ldots + \vartheta(p_1^{\alpha_1})) \cdots (1 + \vartheta(p_k) + \vartheta(p_k^2) + \ldots + \vartheta(p_k^{\alpha_k})) \tag{3}$$

Beweis: Löst man auf der rechten Seite die Klammern auf, so erhält man

$$\sum_{0 \le \beta_i \le \alpha_i} \vartheta(p_1^{\beta_1}) \cdots \vartheta(p_k^{\beta_k}) = \sum_{0 \le \beta_i \le \alpha_i} \vartheta(p_1^{\beta_1} \cdots p_k^{\beta_k})$$

Die Produkte $p_1^{\beta_1} \cdots p_k^{\beta_k}$ mit $0 \le \beta_1 \le \alpha_1, \ldots, 0 \le \beta_k \le \alpha_k$ durchlaufen aber gerade die Teiler von a. $\square$
Bemerkung: Für $a = 1$ ist die rechte Seite von (3) gleich 1 zu setzen.

3 Teilerzahl und -summe

Setzt man in (3) $\vartheta \equiv 1$, so erhält man für die Anzahl $\tau(a)$ der Teiler von a

$$\tau(a) = \sum_{d|a} 1 = (\alpha_1 + 1) \cdots (\alpha_k + 1)$$

Folgerungen:

- τ ist eine multiplikative Funktion.
- Für jede Primzahl p gilt speziell $\tau(p^\alpha) = \alpha + 1$.

Setzt man in (3) $\vartheta(a) = a$, so erhält man für die Summe $S(a)$ der Teiler von a

$$\begin{aligned} S(a) &= \sum_{d|a} d = (1 + p_1 + \ldots + p_1^{\alpha_1}) \cdots (1 + p_k + \ldots + p_k^{\alpha_k}) \\ S(a) &= \frac{p_1^{\alpha_1+1} - 1}{p_1 - 1} \cdots \frac{p_k^{\alpha_k+1} - 1}{p_k - 1} \end{aligned}$$

Folgerungen:

- S ist eine multiplikative Funktion.
- Für jede Primzahl p gilt speziell $S(p^\alpha) = \frac{p^{\alpha+1}-1}{p-1}$.

[1] d.h. die p_i sind paarweise verschiedene Primzahlen

4 Die Möbius-Funktion

Die *Möbiusfunktion* μ ist diejenige multiplikative Funktion, die für alle Primzahlen p

$$\mu(p) = -1 \quad \mu(p^\alpha) = 0 \ (\alpha > 1)$$

erfüllt. Es gilt:

- Ist a durch eine Quadratzahl > 1 teilbar (d.h. in der kanonischen Zerlegung $a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$ ist mindestens einer der Exponenten $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ größer als 1), so ist $\mu(a) = 0$.
- Ist $a = p_1 \cdots p_k$ das Produkt k verschiedener Primzahlen, so gilt $\mu(a) = (-1)^k$.

Theorem 3 *Für jede multiplikative Funktion ϑ gilt*

$$\sum_{d|a} \mu(d)\vartheta(d) = (1 - \vartheta(p_1)) \cdots (1 - \vartheta(p_k))$$

Beweis. $\vartheta_1(a) = \mu(a)\theta(a)$ ist als Produkt multiplikativer Funktionen wieder multiplikativ und (3) liefert

$$\begin{aligned}
\sum_{d|a} \mu(d)\vartheta(d) &= \sum_{d|a} \vartheta_1(d) \\
&= (1 + \vartheta_1(p_1) + \vartheta_1(p_1^2) + \ldots + \vartheta_1(p_1^{\alpha_1})) \\
&\quad \cdots (1 + \vartheta_1(p_k) + \vartheta_1(p_k^2) + \ldots + \vartheta_1(p_k^{\alpha_k})) \\
&= (1 + \mu(p_1)\vartheta(p_1) + \mu(p_1^2)\vartheta(p_1^2) + \ldots + \mu(p_1^{\alpha_1})\vartheta(p_1^{\alpha_1})) \\
&\quad \cdots (1 + \mu(p_k)\vartheta(p_k) + \mu(p_k^2)\vartheta(p_k^2) + \ldots + \mu(p_k^{\alpha_k})\vartheta(p_k^{\alpha_k})) \\
&= (1 - \vartheta(p_1)) \cdots (1 - \vartheta(p_k))
\end{aligned}$$

Anwendungen:

- Für $\vartheta \equiv 1$ folgt

$$\sum_{d|a} \mu(d) = \begin{cases} 0 & a > 1 \\ 1 & a = 1 \end{cases}$$

- Für $\vartheta(a) = \frac{1}{a}$ folgt

$$\sum_{d|a} \frac{\mu(d)}{d} = \begin{cases} (1 - \frac{1}{p_1}) \cdots (1 - \frac{1}{p_k}) & a > 1 \\ 1 & a = 1 \end{cases}$$

5 Die Eulersche Funktion

Für positives ganzes a bedeute $\varphi(a)$ die Anzahl der Zahlen aus $1, 2, \ldots, a$, die zu a teilerfremd sind. φ heißt *Eulersche Funktion.*

Theorem 4 *Es gilt für $a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$ die Darstellung*

$$\begin{aligned}\varphi(a) &= a\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_k}\right) \\ &= (p_1^{\alpha_1} - p_1^{\alpha_1-1})\cdots(p_k^{\alpha_k} - p_k^{\alpha_k-1})\end{aligned}$$

Beweis: Setzt man $d_1 = (1, a), d_2 = (2, a), \ldots, d_a = (a, a)$, so gilt

$$\varphi(a) = \sum_{d|d_1} \mu(d) + \ldots + \sum_{d|d_a} \mu(d) = \sum_{d|a} S_d\, \mu(d),$$

denn d durchläuft genau die Teiler von a: Ist nämlich d Teiler eines d_j so ist es wegen $d_j|a$ auch Teiler von a. Umgekehrt taucht jeder Teiler d von a unter den Teilern der d_j auf, denn es ist $d_d = (d, a) = d$. S_d bezeichnet für jeden Teiler d von a die Anzahl derjenigen d_j, die durch d teilbar sind. Da dies genau die Zahlen $d_d, d_{2d}, \ldots, d_a$ sind, gilt $S_d = \frac{a}{d}$ und wir erhalten weiter

$$\varphi(a) = \sum_{d|a} \mu(d)\frac{a}{d} = a \sum_{d|a} \frac{\mu(d)}{d} = a(1-\frac{1}{p_1})\cdots(1-\frac{1}{p_k})$$

□

Folgerungen:

- φ ist eine multiplikative Funktion.
- Für jede Primzahl p und $\alpha > 0$ gilt speziell $\varphi(p^\alpha) = p^\alpha - p^{\alpha-1}$.

Theorem 5 *Es gilt*

$$\sum_{d|a} \varphi(d) = a$$

Beweis: Nach (3) gilt

$$\begin{aligned}\sum_{d|a} \varphi(d) &= (1 + \varphi(p_1) + \varphi(p_1^2) + \ldots + \varphi(p_1^{\alpha_1}))\cdots(1 + \varphi(p_k) + \varphi(p_k^2) + \ldots + \varphi(p_k^{\alpha_k})) \\ &= (1 + (p_1 - 1) + (p_1^2 - p_1) + \ldots + (p_1^{\alpha_1} - p_1^{\alpha_1-1})) \\ &\quad \cdots(1 + (p_k - 1) + (p_k^2 - p_k) + \ldots + (p_k^{\alpha_k} - p_k^{\alpha_k-1})) \\ &= p_1^{\alpha_1}\cdots p_k^{\alpha_k} = a\end{aligned}$$

□