Kombinatorik

Gunter Semmler, Freiberg
semmler@math.tu-freiberg.de

1 Kombinatorische Grundformeln

Kombinatorik beschäftigt sich mit der Anzahlbestimmung gewisser Anordnungen von Objekten. In Olympiaden ist dieses Thema deshalb so beliebt, weil man ohne große Vorkenntnisse Aufgaben bearbeiten kann. Die eingerahmten Formeln dieses Artikels sind so nützlich, dass sie jeder Olympiadeteilnehmer auswendig wissen sollte.

Beispiel 1 Wieviele Möglichkeiten gibt es, die Buchstaben des Wortes "CANTOR" anzuordnen?

Es gibt 6 Möglichkeiten, den ersten Buchstaben auszusuchen, für jede Wahl eines ersten Buchstaben 5 Möglichkeiten, den zweiten Buchstaben zu wählen, usw. Insgesamt gibt es also $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdots 1 = 6!$ Anordnungsmöglichkeiten für die sechs Buchstaben von "CANTOR". Eine jede Umordnung der Buchstaben heißt auch *Permutation*. Allgemein kann man sich genauso überlegen, dass die

$$\boxed{\text{Zahl der Permutationen von } n \text{ paarweise verschiedenen Objekten gleich } n!}$$

ist.

Beispiel 2 Auf wieviele Arten lassen sich die Buchstaben des Wortes "EULER" anordnen?

Obwohl das Wort "EULER" 5 Buchstaben hat, lautet die Antwort nicht 5!, denn der Buchstabe E kommt doppelt vor. Bei 5! Möglichkeiten hat man jede Anordnungsmöglichkeit doppelt gezählt, denn die beiden E's lassen sich vertauschen, ohne das Wort zu ändern. Die richtige Antwort lautet also 5!/2. Auch diese Beipiel ist ein Spezialfall einer allgemeineren Formel: Gegeben seien n Objekte, die aus k Gruppen von $n_1, n_2, \ldots, n_k$ jeweils gleichen Objekten bestehen. Es gilt also $n = n_1 + \ldots + n_k$ und die Zahl der Anordnungsmöglichkeiten ist die

$$\boxed{\text{Zahl der Permutationen mit Wiederholungen gleich } \frac{n!}{n_1! \cdots n_k!}.}$$

Aufgabe 1 Auf wieviele Arten lassen sich die Buchstaben des Wortes "RAMANUJAN" anordnen?

Beispiel 3 Eine Pizza ist mit 8 verschiedenen Zutaten verfügbar: Käse, Knoblauch, Ananas, Wurst, Pepperoni, Pilze, Oliven, grüner Pfeffer. Wieviele Möglichkeiten gibt es, eine Pizza mit genau drei Beilagen zu wählen?

Um die Aufgabe zu lösen, wenden wir ein ebenso einfaches wie nützliches Prinzip an:

> Besteht zwischen zwei Mengen A und B eine bijektive (d.h. eineindeutige) Abbildung, so genügt es, eine der beiden Mengen abzuzählen, die andere enthält genau so viele Elemente.

Wir betrachten alle verschiedenen Anordnungen der Ziffern aus 11100000. Eine Bijektion auf wie Menge der Zutatenkombinationen wird durch folgende Vorschrift gegeben: Steht in einer Permutation von 11100000 an n-ter, m-ter und k-ter Stelle eine Eins, so nehme man die n-te, m-te und k-te Zutat entsprechend der obigen Reihenfolge. Z.B. bedeutet 01001100 eine Pizza mit Knoblauch, Pepperoni und Pilzen (geschmackliche Aspekte spielen bei dieser Aufgabe selbstverständlich keine Rolle). Die Anordnungsmöglichkeiten der Ziffern sind aber Permutationen mit Wiederholung, also $\dfrac{8!}{5!3!} = \binom{8}{3}$. Diese Überlegung führt uns allgmein darauf, dass die

> Zahl der Kombinationen von k aus n Elementen ohne Wiederholungen gleich $\binom{n}{k}$

ist, d.h. es wird die Anzahl der Möglichkeiten gezählt, aus n verschiedenen Objekten genau k auszuwählen, ohne dass ein Objekt mehrfach gewählt werden kann. Dabei ist die Reihenfolge egal. Wird sie zusätzlich berücksichtigt, so ist das Ergebnis noch mit der Anzahl $k!$ von Permutationen von k Objekten zu multiplizieren, d.h. man findet dass die

> Zahl der Variationen von k aus n Elementen ohne Wiederholung gleich $\dfrac{n!}{(n-k)!}$

ist.

Wenn man

$$(x+y)^n = (x+y)(x+y)\cdots(x+y)$$

ausmultipliziert, so wählt man aus jedem Faktor entweder x oder y aus, multipliziert diese Auswahl von Variablen miteinander und addiert anschließend alle dabei entstehenden Produkte. Das Produkt $x^k y^{n-k}$ entsteht dabei, wenn man genau k-mal x wählt (und notwendigerweise $(n-k)$ mal y). Dazu gibt es nach obigem $\binom{n}{k}$ Möglichkeiten. Folglich tritt das Produkt $x^k y^{n-k}$ mit dem Koeffizient $\binom{n}{k}$ auf. Für k sind alle Werte von 0 bis n möglich. Damit ist ein kombinatorischer Beweis des wichtigen binomischen Satzes

$$\boxed{(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}}$$

geliefert. Auch viele andere Formeln lassen sich statt durch algebraische Rechnungen durch kombinatorische Interpretation begründen. Dabei geht man von dem allgemeinen Grundsatz

> Zähle dieselben Objekte auf zweierlei Weise ab!

aus.

Beispiel 4 Man finde einen kombinatorischen Beweis für die Formel

$$\binom{2n}{2} = 2\binom{n}{2} + n^2.$$

In einem Raum mit n Frauen und n Männern sollen zwei Personen ausgewählt werden. Da insgesamt $2n$ Personen anwesend sind, gibt es dazu $\binom{2n}{2}$ Möglichkeiten. Die Zahl der Möglichkeiten, zwei Frauen auszuwählen, ist gleich $\binom{n}{2}$, die Zahl der Möglichkeiten, zwei Männer auszuwählen, ist ebenfalls $\binom{n}{2}$. Schließlich gibt es n^2 Möglichkeiten, ein Paar aus einer Frau und einem Mann auszusuchen. Andere Lösungsmöglichkeit: Man betrachte die Anzahl der möglichen Verbindungslinien zwischen den Eckpunkten eines $2n$-Ecks, wobei n Punkte rot und n Punkte grün gefärbt sind...

Aufgabe 2 Man leite folgende Formeln durch kombinatorische Interpretation her:

a.
$$\binom{2n+2}{n+1} = \binom{2n}{n+1} + 2\binom{2n}{n} + \binom{2n}{n-1}$$

b.
$$\binom{n}{s} = \frac{n}{s}\binom{n-1}{s-1}$$

c.
$$\binom{n}{r}\binom{r}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{r-k}$$

d.
$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\binom{n}{n-i} = \binom{2n}{n} = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}^2$$

e.
$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n$$

Aufgabe 3 Von $3n+1$ Objekten seien n ununterscheidbar, die restlichen alle von diesen n und auch untereinander verschieden. Man zeige, dass es genau 2^{2n} Möglichkeiten gibt, n Objekte auszuwählen.

Aufgabe 4 Wieviele Möglichkeiten gibt es, zwei disjunkte nichtleere Teilmengen aus der Menge $\{1, \ldots, n\}$ auszuwählen?

Aufgabe 5 Wieviele Diagonalen hat ein konvexes n-Eck? Und wieviele Diagonalenschnittpunkte, vorausgesetzt, keine drei Diagonalen gehen durch einen Punkt?

Aufgabe 6 In der Ebene sei ein kartesisches Koordinatensystem festgelegt. Es werden Wege entlang der Gitterpunkte (das sind Punkte mit ganzzahligen Koordinaten) betrachtet, bei denen vom Punkt (i, j) ein Schritt nur nach $(i+1, j)$ oder $(i, j+1)$ möglich ist. Wieviele solcher Wege gibt es vom Punkt $(0, 0)$ zum Punkt (m, n), die völlig unterhalb der Geraden $y = x + 1$ liegen?

2 Die Formel von Vereinigung und Durchschnitt

Mit $|A|$ bezeichnen wir die Anzahl der Elemente einer endlichen Menge A. Für zwei Mengen A und B findet man leicht

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Für drei Mengen A, B und C illustriert das Mengendiagramm (zu ergänzen) die Formel

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

Die Verallgemeinerung auf n Mengen sieht folgendermaßen aus:

$$\boxed{\begin{aligned} |A_1 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - & \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j| + \ldots \\ + (-1)^{k-1} & \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \ldots i_k \le n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}| \\ + \ldots + & (-1)^{n-1} |A_1 \cap \ldots \cap A_n| \end{aligned}}$$

Um diese Formel zu beweisen betrachten wir ein beliebiges Element $x \in A_1 \cup \ldots \cup A_n$. Auf der linken Seite wird dieses Element genau einmal gezählt. Angenommen, x ist in genau r Mengen aus $A_1, \ldots, A_n$ enthalten. Das bedeutet, dass x in der Summe $\sum_{i=1}^{n} |A_i|$ genau r-fach mitgezählt wurde. In der zweiten Summe $\sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j|$ wurde x so oft mitgezählt, wie es Kombinationen von zwei Mengen gibt, die beide x enthalten, also $\binom{r}{2}$ mal. In der dritten Summe wurde x entsprechend $\binom{r}{3}$ mal mitgezählt, usw. Es genügt also die Identität

$$1 = r - \binom{r}{2} + \binom{r}{3} - \ldots + (-1)^{r-1} \binom{r}{r}$$

zu beweisen. Wegen $\binom{r}{0} = 1$ und $\binom{r}{1} = r$ folgt diese aber unmittelbar aus dem binomischen Satz:

$$\binom{r}{0} - \binom{r}{1} + \binom{r}{2} - \binom{r}{3} + \ldots + (-1)^r \binom{r}{r} = (1-1)^r = 0.$$

Bei Anwendungen dieser Formel kommt es darauf an, die Mengen A_i möglichst geschickt zu wählen. Wie übrigens bei allen kombinatorischen Aufgaben halte man sich immer vor Augen:

Manchmal ist es einfacher, das Komplement einer Menge abzuzählen.

Beispiel 5 Wieviele Möglichkeiten gibt es, aus einem Kartenspiel mit 52 Karten fünf auszuwählen, so dass alle vier Farben Karo, Herz, Pique, Kreuz vertreten sind?

Insgesamt gibt es $\binom{52}{5}$ Möglichkeiten, fünf Karten auszuwählen. Bedeute nun A_1, A_2, A_3 bzw. A_4 die Menge derjenigen Fünfkartenauswahlen, die kein Karo, Herz, Pique bzw. Kreuz enthalten. A_1 umfasst beispielsweise alle Auswahlen von 5 Karten aus den 3 Farben Herz, Pique, Kreuz, also aus 39 Karten:

$$|A_1| = |A_2| = |A_3| = |A_4| = \binom{39}{5} \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{4} |A_i| = 4 \cdot \binom{39}{5}.$$

$A_i \cap A_j \, (i \neq j)$ stellt die Menge derjenigen Fünferauswahlen dar, die zwei Farben nicht enthalten, es wird also aus 26 Karten ausgewählt:

$$|A_i \cap A_j| = \binom{26}{5} \, (i \neq j) \quad \Rightarrow \quad \sum_{1 \leq i < j \leq 4} |A_i \cap A_j| = \binom{4}{2}\binom{26}{5}.$$

Genauso folgt

$$\sum_{1 \leq i < j < k \leq 4} |A_i \cap A_j \cap A_k| = \binom{4}{3}\binom{13}{5},$$

während $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4$ leer ist, denn es können nicht alle Farben gleichzeitig fehlen. Die Formel von Vereinigung und Durchschnitt liefert aber nun

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| = \binom{4}{1}\binom{39}{5} - \binom{4}{2}\binom{26}{5} + \binom{4}{3}\binom{13}{5} - 0$$

$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$ stellt die Menge derjenigen Fünferauswahlen dar, in der mindestens eine Farbe fehlt, also gerade das Komplement der gesuchten Menge. Somit ist die Anzahl der Fünferauswahlen, in denen alle Farben vertreten sind, gleich

$$\binom{52}{5} - \binom{4}{1}\binom{39}{5} + \binom{4}{2}\binom{26}{5} - \binom{4}{3}\binom{13}{5}.$$

Aufgabe 7 Wieviele ganze Zahlen zwischen 1 und 1000 (beide inbegriffen) sind weder durch 2,3, noch 5 teilbar?

Aufgabe 8 Jedes von n Kindern soll ein Eis einer von k verfügbaren Sorten bekommen. Wieviele Möglichkeiten gibt es, die Eissorten zu verteilen, wenn jede Sorte mindestens einmal ausgegeben werden soll?

Aufgabe 9 Man berechne die Anzahl der Möglichkeiten, wie 4 Ehepaare auf einer Reihe von 8 Stühlen Platz nehmen können, ohne dass jemand nebem seinem eigenen Ehepartner sitzt!

Aufgabe 10 Wieviele Möglichkeiten gibt es, dass n Personen miteinander telefonieren, so dass jeder mit genau einem anderen spricht und keiner sich selbst anruft?

3 Rekursionen und erzeugende Funktionen

Bei schwierigen Aufgaben ist es oft einfacher, für gesuchte Anzahlen zunächst rekursive Beziehungen aufzustellen. Um daraus eine explizite Formel zu machen, lernen wir die Methode der erzeugenden Funktionen kennen.

Beispiel 6 Auf wieviele Weisen kann ein konvexes n-Eck trianguliert werden, d.h. durch Diagonalen in Dreiecke zerlegt werden?

Die gesuchte Anzahl sei t_n. Offenbar gilt $t_3 = 1, t_4 = 2, t_5 = 5$, siehe folgendes Bild: (fuenf.bmp fehlt)
Fixieren wir im Sechseck eine Seite und betrachten alle möglichen Dreiecke mit dieser Seite als Grundseite, so finden wir

$$t_6 = t_5 + t_4 + t_4 + t_5 = 14$$

Bild sechs.bmp fehlt.
Im Siebeneck gilt die Formel

$$t_7 = t_2t_6 + t_3t_5 + t_4t_4 + t_5t_3 + t_6t_2,$$

wobei $t_2 = 1$ gesetzt worden ist. Bild sieben.bmp fehlt.
Allgemein folgt

$$t_n = t_2t_{n-1} + t_3t_{n-2} + \ldots + t_{n-1}t_2 = \sum_{k=2}^{n-1} t_kt_{n+1-k}.$$

Damit ist eine rekursive Darstellung gewonnen. Die Zahlen $C_n = t_{n+2}$ (die Indexverschiebung hat historische Gründe) sind als *Catalansche Zahlen* bekannt. Um aus der Rekursionsformel

$$C_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_kC_{n-k}$$

eine explizite zu gewinnen, ordnen wir dieser Folge eine Potenzreihe mit den Catalanschen Zahlen als Koeffizienten zu, nämlich

$$f(x) = C_0 + C_1x + C_2x^2 + \ldots.$$

Solange man keine konkreten Werte für x einsetzt, braucht man sich um Konvergenzfragen nicht kümmern, sondern kann mit diesen Potenzreihen formal wie mit endlichen Polynomen rechen. (Es gibt eine mathematische Theorie, die das streng begründet.) Wir quadrieren:

$$f(x)^2 = C_0^2 + (C_1C_0 + C_0C_1)x + (C_2C_0 + C_1C_1 + C_0C_2)x^2 + \ldots = C_1 + C_2x + C_3x^2 + \ldots$$

Also gilt

$$xf(x)^2 = f(x) - C_0 = f(x) - 1$$

Das ist eine quadratische Gleichung für $f(x)$ mit der Lösung

$$f(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2x}$$

Wegen $f(0) = C_0$ ist das negative Vorzeichen zu wählen. Wir müssen also

$$f(x) = \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x}$$

in eine Potenzreihe entwickeln und können dann an den Koeffizienten eine explizite Darstellung der Catalanschen Zahlen ablesen. Wir erinnern uns an die Binominalreihe

$$\boxed{(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \tbinom{\alpha}{n} x^n.} \qquad (1)$$

Dabei ist der Binominalkoeffizient definiert durch

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}.$$

Für natürliches α verschwindet $\binom{\alpha}{n}$ für $n > \alpha$, so dass (1) in eine endliche Summe übergeht. Die Binominalreihe ist also eine Verallgemeinerung des binomischen Satzes auf reelle Exponenten. Man rechnet

$$\begin{aligned}
\sqrt{1-4x} &= 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}(-4x)^n \\
&= 1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-3)}{2^n n!}(-4)^n x^n \\
&= 1-2x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-3)2^{n-1}(n-1)!}{n\cdot(n-1)!(n-1)!}x^{n-1} \\
&= 1-2x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-2)!}{n\cdot(n-1)!(n-1)!}x^{n-1}
\end{aligned}$$

Damit folgt

$$f(x)=\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}x^{n-1}.$$

Der Koeffizient vor x^n ist

$$C_n=\frac{1}{n+1}\binom{2(n+1)-2}{(n+1)-1}=\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

Aufgabe 11 Unter einem Dominostein verstehen wir ein 1×2-Rechteck. Zeige dass die Anzahl f_n der möglichen Überdeckungen eines $1\times n$-Rechtecks durch Dominosteine der Rekursion

$$f_{n+2}=f_{n+1}+f_n$$

genügt. Die Folge f_n heißt auch Fibonacci-Folge. Mit Hilfe von erzeugenden Funktionen gewinne man die Formel

$$f_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right].$$

Aufgabe 12 Wieviele n-Tupel aus den Zahlen $1,2,3,4$ gibt es, in denen 1 und 2 nirgends benachbart sind?

Literatur

[1] Engel: IMO-Übungsaufgaben, Heft 22. Herausgegeben vom Zentralen Komitee für die Olympiaden Junger Mathematiker beim Ministerium für Volksbildung der DDR.

[2] Engel, A.: Problem Solving Strategies. Springer Verlag 1998.

[3] Zeitz, P.: The art and craft of problem solving. John Wiley & Sons 1999.

Comments

graebe (2005-01-05): Es fehlen noch einige Bilder.