Funktionalgleichungen

Gunter Semmler, Freiberg
semmler@math.tu-freiberg.de

Funktionalgleichungen sind Gleichungen zur Bestimmung oder Charakterisierung von unbekannten Funktionen. Dabei kommt die gesuchte Funktion nicht nur in der Form $f(x)$ vor, sondern auch mit einer Transformation ihres Argumentes x, zum Beispiel in der Form $f(x+2)$, $f(3x)$, $f(x+y)$ oder $f(x-y)$. Es gibt keine allgemeingültige Technik zur Lösung jeder beliebig vorgelegten Funktionalgleichung, aber eine Reihe von erfolgversprechenden Methoden, die wir an Hand einiger Beispiele kennenlernen wollen.

1 Die Cauchysche Funktionalgleichung

Im Jahre 1821 beschäftigte sich A.L. Cauchy (1789-1857) mit der Bestimmung aller auf $\mathbb{R}$ definierten Funktionen, die der Gleichung

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \tag{1}$$

genügen. Nehmen wir nun an, dass f eine Lösung ist und leiten Eigenschaften von f ab. Eine wichtige Methode ist das **Einsetzen spezieller Werte**:

$$\begin{aligned} &x = y = 0 \;\Rightarrow\; f(0) = f(0) + f(0) \;\Rightarrow\; f(0) = 0. \\ &x = -y \;\Rightarrow\; f(0) = f(x) + f(-x) \;\Rightarrow\; f(-x) = -f(x). \end{aligned}$$

Jede Lösung ist also eine ungerade Funktion.

$$\begin{aligned} &y = x \;\Rightarrow\; f(2x) = f(x) + f(x) = 2\,f(x). \\ &y = 2x \;\Rightarrow\; f(3x) = f(x) + f(2x) = f(x) + 2\,f(x) = 3\,f(x). \end{aligned}$$

Induktiv zeigt man für $n \in \mathbb{N}$

$$f(nx) = n\,f(x). \tag{2}$$

Wegen $f(x) = -f(x)$ gilt die Formel (2) sogar für alle $n \in \mathbb{Z}$. Ist $x = m/n$ $(m, n \in \mathbb{N})$ nun eine rationale Zahl, folgt

$$f(m) = f\left(n \cdot \frac{m}{n}\right) = nf\left(\frac{m}{n}\right),$$

woraus man

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{1}{n} f(m) = \frac{m}{n} \cdot f(1)$$

erhält. Damit ist f für alle rationalen Argumente bestimmt, wenn $f(1) = c$ vorgegeben wird.
Fazit: Wenn f eine Lösung der Funktionalgleichung ist, so gilt für rationale x

$$f(x) = c \cdot x, \tag{3}$$

wobei $c = f(1)$ ist. Setzt man nun $f(x) = c \cdot x$ für alle reellen x, so zeigt eine **Probe**, dass diese Funktionen Lösungen der Aufgabe sind. Allerdings entsteht die Frage, ob noch weitere Lösungen existieren. Unter speziellen Voraussetzungen kann das ausgeschlossen werden, zum Beispiel, wenn man zusätzlich fordert, dass f stetig ist. Für jedes $x \in \mathbb{R}$ existiert nämlich ein Folge rationaler Zahlen x_n, die gegen x konvergieren und man kann schlussfolgern, dass

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} cx_n = cx.$$

Für schwächere Voraussetzungen, unter denen keine weiteren Lösungen als die Funktionen $f(x) = c\,x$ existieren, siehe die Aufgaben 1 und 2.

Es ist überraschend, dass ohne Zusatzvoraussetzungen tatsächlich noch weitere Lösungen der Cauchyschen Funktionalgleichung existieren, wie G. Hamel (1877-1954) erst 1905 gefunden hat. Deren Konstruktion erfordert aber Kenntnisse, die wesentlich über die Schulmathematik hinausgehen und soll daher nur angedeutet werden. Dazu betrachten wir die reellen Zahlen als Vektorraum über den rationalen Zahlen, d.h. die reellen Zahlen sind die „Vektoren“, die rationalen Zahlen die „Skalare“. Sei $B = \{b_i : i \in I\}$ eine Basis dieses Vektorraumes, d.h. jedes $x \in \mathbb{R}$ kann eindeutig dargestellt werden als Linearkombination $x = r_1b_1 + \ldots + r_nb_n$ mit gewissen $r_1, \ldots, r_n \in \mathbb{Q}$ und $b_1, \ldots, b_n \in B$. Dann lässt sich zeigen, dass man alle Lösungen von (1) erhält, wenn man $f(b_i), i \in I$, beliebig definiert und f dann auf $\mathbb{R}$ fortsetzt mittels

$$f(r_1b_1 + \ldots + r_nb_n) := r_1f(b_1) + \ldots + r_nf(b_n).$$

Der Existenznachweis einer Basis B erfordert tiefliegende Hilfsmittel der Mengenlehre. Die unstetigen Lösungen von (1) sind allerdings extrem pathologische Funktionen, siehe Aufgabe 3.

2 Substitutionen

Eine weitere wichtige Methode ist die **Substitution von Argumenten**. Wir demonstrieren dies am Beispiel folgender Verallgemeinerung der Cauchyschen Funktionalgleichung

$$f(ax + by + c) = pf(x) + qf(y) + r \quad \forall x, y \in \mathbb{R}, \tag{4}$$

wobei $a, b, c, p, q \in \mathbb{R}$ gegebene Konstanten mit $abpq \neq 0$ sind. Wir führen nun folgende Substitutionen aus:

$$x = -\frac{c}{a}, y = 0 \quad \Rightarrow \quad f(0) = pf\left(-\frac{c}{a}\right) + qf(0) + r \tag{5}$$

$$x = \frac{u-c}{a}, y = 0 \quad \Rightarrow \quad f(u) = pf\left(\frac{u-c}{a}\right) + qf(0) + r \tag{6}$$

$$x = -\frac{c}{a}, y = \frac{v}{b} \quad \Rightarrow \quad f(v) = pf\left(-\frac{c}{a}\right) + qf\left(\frac{v}{b}\right) + r \tag{7}$$

$$x = \frac{u-c}{a}, y = \frac{v}{b} \quad \Rightarrow \quad f(u+v) = pf\left(\frac{u-c}{a}\right) + qf\left(\frac{v}{b}\right) + r \tag{8}$$

Addition von (5),(8) und Subtraktion von (6), (7) führt auf

$$f(u+v) + f(0) - f(u) - f(v) = 0 \tag{9}$$

Den störenden Term $f(0)$ zu beseitigen gelingt uns durch **Einführen einer Hilfsfunktion** mittels $g(u) := f(u) - f(0)$. g erfüllt dann die Cauchysche Funktionalgleichung $g(x+y) = g(x)+g(y)$. Als stetige Lösungen der Gleichung (4) kommen somit nur die linearen Funktionen $f(x) = \alpha x + \beta$ in Frage. Einsetzen ergibt, dass α und β die Gleichungen

$$\begin{aligned} \alpha a &= \alpha p \\ \alpha b &= \alpha q \\ \beta(1-p-q) &= r - \alpha c \end{aligned}$$

erfüllen müssen, insbesondere existieren nur für $a = p$ und $b = q$ nichtkonstante Lösungen.

Eine weitere Gleichung, die auf die Cauchysche Funktionalgleichung zurückgeführt werden kann, befindet sich in Aufgabe 4.

3 Anwendung der Differentialrechung

Auch wenn in der Aufgabenstellung nicht vorausgesetzt wurde, dass die gesuchte Funktion differenzierbar ist, kann man Differentialrechnung als heuristisches Mittel einsetzen und die gegebene Funktionalgleichung unter Anwendung der üblichen Rechenregeln nach einem oder mehreren Argumenten differenzieren. Auf diese Weise erhält man mitunter sehr schnell eine Vermutung über die Lösung. Die Probe muss zeigen, ob tatsächlich eine Lösung vorliegt. Wenn es dann noch gelingt nachzuweisen, dass außer der (oder den) gefundenen (differenzierbaren) Lösung keine anderen Lösungen existieren (Einzigkeitsnachweis), ist der Lösungsweg komplett.

Beispiel: (OJM 241233A) Man bestimme alle auf der Menge der rationalen Zahlen definierten Funktionen f mit $f(1) = 1$, die der Funktionalgleichung

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + xy(x+y)$$

genügen.

Unter der (vorläufigen) Annahme, dass f sogar für alle reellen Zahlen definiert und differenzierbar ist, ergibt Differentiation nach x

$$\begin{aligned} f'(x+y) &= f'(x) + 2xy + y^2 \\ f''(x+y) &= f''(x) + 2y \\ f'''(x+y) &= f'''(x). \end{aligned}$$

Setzt man $x = 0$, folgt $f'''(y) = \text{const}$. Also muss f ein Polynom dritten Grades sein, das nun leicht bestimmt werden kann:

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{3}x.$$

Die Probe bestätigt, dass diese Funktion Lösung ist. Um zu zeigen, dass es keine weiteren Lösungen gibt, bezeichnen wir die gefundene Lösung mit $f_0(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{3}x$ und suchen weitere Lösungen in der Form $f(x) = f_0(x) + g(x)$, mit einer neuen unbekannten Funktion g (die nun nicht mehr als differenzierbar vorausgesetzt wird). Einsetzen in die gegebene Funktionalgleichung führt auf

$$g(x+y) = g(x) + g(y)$$

Ferner gilt $g(1) = 0$. Da g nur für rationale Argumente zu bestimmen ist, folgt aus den Resultaten über die Cauchysche Funktionalgleichung $g(x) \equiv 0$.

Die Technik, sich erst eine spezielle Lösung zu verschaffen und dann die allgemeine Lösung durch einen Ansatz zu bestimmen ist auch bei Aufgabe 13 erfolgversprechend.

4 Periodische Funktionen

Eine Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt *periodisch*, wenn eine reelle Zahl $p \neq 0$ existiert, so dass

$$f(x+p) = f(x) \tag{10}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt. Existiert eine kleinste positive Zahl p mit (10), so heißt p die *primitive Periode* der Funktion f. Nicht alle periodischen Funktionen müssen eine primitive Periode haben, so ist beispielsweise jede rationale Zahl Periode der Dirichletschen Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x \text{ rational} \\ 1 & \text{falls } x \text{ irrational.} \end{cases}$$

Als Beispiel zu periodischen Funktionen betrachten wir die folgendes Problem:

Aufgabe: (OJM 141236) Es sei $a \neq 0$ reell und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit der Eigenschaft dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$f(x+a) = \frac{f(x)}{3f(x) - 1}.$$

Man zeige dass f periodisch ist.

Lösung: Wir zeigen dass $2a$ eine Periode von f ist:

$$f(x+2a) = f((x+a)+a) = \frac{f(x+a)}{3f(x+a) - 1} = \frac{\frac{f(x)}{3f(x)-1}}{3\frac{f(x)}{3f(x)-1} - 1} = \frac{f(x)}{3f(x) - (3f(x) - 1)} = f(x).$$

Ganz ähnlich lässt sich auch Aufgabe 11 lösen.

5 Aufgaben

1. (J.G. Darboux, 1842-1917) Alle Lösungen f der Cauchyschen Funktionalgleichung (1), für die ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass $f(x)$ nichtnegativ (oder nicht-positiv) ist für $0 < x < \varepsilon$ sind von der Form (3).

2. (OJM 191233A) Man ermittle alle reellen Funktionen mit (1) unter den Zusatzbedingungen $f(1) = 1$ und
$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x^2} f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

3. Ist die Lösung f der Cauchyschen Funktionalgleichung nicht von der Form (3), so ist der Graph
$$\{(x, f(x)) : \ x \in \mathbb{R}\}$$
eine in der x-y-Ebene dichte Menge, d.h. zu jedem $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ existiert eine Folge (x_n) mit $x_n \to x_0$ und $f(x_n) \to y_0$.

4. Die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ erfüllt genau dann die Funktionalgleichung
$$g(x + y) = g(x)g(y),$$
wenn sie entweder identisch verschwindet oder von der Form $g(x) = e^{f(x)}$ ist, wobei f eine Lösung von (1) ist.

5. (OJM 51233) Seien a, b, c reelle Zahlen. Man bestimme in Abhängigkeit von a, b, c sämtliche Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die der Funktionalgleichung
$$af(x - 1) + bf(1 - x) = cx$$
genügen.

6. Man ermittle alle diejenigen Funktionen f, die für alle reellen Zahlen x definiert sind und den folgenden Bedingungen genügen:
   (1) Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $f(xy) = f(x)f(y)$.
   (2) Für alle reellen Zahlen $x \neq 0$ gilt
$$f(1 + x) = f(1) + f(x)\left(1 + \frac{2}{x}\right).$$

7. (OJM 171236A) Gegeben seien eine natürliche Zahl $n > 1$ und die Funktionalgleichung
$$f(x^n) = f(x). \tag{11}$$
   (a) Man ermittle alle stetigen Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit (11).
   (b) Man gebe eine unstetige Lösung von (11) an.

8. (Bulgarische MO 1982) Man bestimme alle reellwertigen, an der Stelle $x = 0$ stetigen Funktionen f mit dem Definitionsbereich $\mathbb{R}$, welche die Funktionalgleichung
$$f(x) = \frac{1}{2} f\left(\frac{x}{2}\right) + x$$
erfüllen.

9. (Russische MO 2000) Gib alle Funktionen $f : \mathbb{R} \to \ R$ an, die für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$ der Ungleichung
$$f(x+y) + f(y+z) + f(z+x) \geq 3f(x+2y+3z)$$
genügen.

10. (IMO 1992) Bestimme alle Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die der Funktionalgleichung
$$f(x^2 + f(y)) = y + f(x)^2$$
genügen.

11. (OJM 141236) Es sei $a \neq 0$ reell und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit der Eigenschaft dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt
$$f(x+a) = \frac{1+f(x)}{1-f(x)}.$$
Man zeige, dass f periodisch ist, und gebe ein Beispiel für eine solche Funktion an.

12. Bestimme alle Funktionen $f : \mathbb{R} \setminus \{0, 1\} \to \mathbb{R}$ mit
$$f(x) + f\left(\frac{1}{1-x}\right) = x$$
für alle $x \neq 0, 1$.

13. Man löse in der Klasse der stetigen Funktionen die Funktionalgleichung
$$f(x+y) = f(x) + f(y) + f(x)f(y).$$

14. (Neuseeländische MO 1998) Bestimme alle Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, welche der Funktionalgleichung
$$f(xf(x) + f(y)) = y + f(x)^2$$
genügen.

Literatur

[1] Aczél, J.: On Applications and Theory of Functional Equations. Birkhäuser Verlag 1969.

[2] Burosch, G. u.a.: IMO-Übungsaufgaben, Heft 20. Herausgegeben vom Zentralen Komitee für die Olympiaden Junger Mathematiker beim Ministerium für Volksbildung der DDR.

[3] Engel, A.: Problem Solving Strategies. Springer Verlag 1998.

[4] `http://www.matholymp.com`

[5] `http://www.mccme.ru/olympiads`

[6] Lehmann, J.: Mathematischer Lesebogen „Junge Mathematiker“ Heft 80, herausgegeben vom Bezirkskabinett für außerunterrichtliche Tätigkeit, Rat des Bezirkes Leipzig 1987.

[7] Sprengel, H.-J., Wilhelm, O.: Funktionen und Funktionalgleichungen. Mathematische Schülerbücherei 114, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1984.

Attribution Section

semmler (Dec 2004): Contributed to KoSemNet
graebe (2005-01-05): Prepared along the KoSemNet rules