

# Mathematik in der Unterstufe

Axel Schüler, Mathematisches Institut, Univ. Leipzig

`mailto:Axel.Schueler@math.uni-leipzig.de`

18.03.2006

Auf den folgenden Seiten stelle ich eine Liste von *Büchern und Zeitschriften* zusammen, die ich für geeignet halte, das Interesse am Knobeln und an der Mathematik zu vertiefen. Im Anschluss erkläre ich einige „Nimm-Spiele“, die als Zwei-Personen-Spiele, das strategische Denken schulen sollen. Auch andere *Spiele* werden erläutert; käuflich erwerbbar Spiele werden vorgestellt. Schließlich gebe ich eine Reihe von *Internet-Adressen* an, wo man Spiele, Aufgabensammlungen, Wettbewerbsaufgaben erhalten kann.

## Literatur

- [1] Dahl, K. und S. Nordqvist: *Zahlen, Spiralen und magische Quadrate. Mathe für jeden*, Friedrich Oetinger, Hamburg, 1996
- [2] K. Gericke, B. Rautenberg, H.-J. Sprengel: *Mathematische außerunterrichtliche Tätigkeit in der Unterstufe (Klasse 3) — Theorie und Praxis*, Heft 71 in der Reihe Potsdamer Forschungen, Pädagogische Hochschule Karl Liebknecht, Potsdam, 1987
- [3] Freyer, K., R. Gaebler und W. Möckel: *gut gedacht ist halb gelöst: 200 Knobeleyen*, Nummer 53 in Mathematische Schülerbücherei, Urania, Leipzig, Jena, Berlin, 1987
- [4] Kordemski, B.: *Köpfchen muß man haben. Mathematik zur Unterhaltung*, Aulis Verlag Deubner & Co. KG, Köln, 1975
- [5] Kordemski, B.: *Köpfchen, Köpfchen! Mathematik zur Unterhaltung*, Nummer 78 in Mathematische Schülerbücherei, Urania-Verlag, Leipzig, Jena, Berlin, 1983

---

This material belongs to the Public Domain KoSemNet data base. It can be freely used, distributed and modified, if properly attributed. Details are regulated by the *Creative Commons Attribution License*, see <http://creativecommons.org/licenses/by/2.0>.

For the KoSemNet project see <http://lsgm.uni-leipzig.de/KoSemNet>.

- [6] Lehmann, J.: *Mathe mit Pfiff*, Nummer 82 in Mathematische Schülerbücherei, Urania, Leipzig, Jena, Berlin, 1977
- [7] Lehmann, J.: *Kurzweil durch Mathe*, Nummer 82 in Mathematische Schülerbücherei, Urania, Leipzig, Jena, Berlin, 1980
- [8] Lehmann, J.: *2 mal 2 plus Spaß dabei*, Nummer 100 in Mathematische Schülerbücherei, Volk und Wissen, Berlin, 1987
- [9] Lehmann, J.: *Mathe mit Herz*, Kopf & Nuss, Urania, Leipzig, Jena, Berlin, 1991
- [10] Moser, S.: *Spaß mit Zahlenspielen*, Nummer 443 in humboldt-taschenbuch, Humboldt-Taschenbuchverlag Jacobi KG, München, 1983
- [11] Smullyan, R.: *Dame oder Tiger?*, Fischer Taschenbuch, Frankfurt, 1985
- [12] Sperling, W.: *Denkspiele für kluge Köpfe*, Albert Müller, Zürich, 1940

Sehr gute Sammlungen von Knobelaufgaben verschiedener Schwierigkeitsgrade sind [5, 3]. Das erste ist in der Stadtteilbibliothek (Schönefeld) und in der Informatik-Bibliothek (Augustusplatz, Hauptgebäude) vorhanden. Das zweite in der Stadtbibliothek (Leuschner Platz).

Witzig illustriert ist das Buch von K. Dahl und S. Nordqvist (ja, der mit Findus und Petterson). Es liefert anschauliche Einblicke in interessante Teilgebiete der Mathematik, weniger Knobelaufgaben. Smullyans Buch [11] enthält hauptsächlich reine Denkaufgaben, die logisches Kombinieren verlangen. Wärmsten zu empfehlen sind alle Bücher [6, 8, 9, 7] vom Mathe-Lehmann, dem ehemaligen Chefredakteur der Schülerzeitschrift „Alpha“. Sehr lebevolle Details und Illustrationen sind in [7]. Angesprochen sind Schüler hauptsächlich von Klasse 5 bis 10, doch es gibt auch Knobelaufgaben für die Kleinen.

## Mathematik im Internet

Eine Sammlung von www-Adressen, wo Aufgaben und mathematische Themen für Schüler angeboten werden, findet man unter unserer homepage

<http://lsgm.uni-leipzig.de/andere.html>

Hier sind viele mathematische Schülerklubs aus ganz Deutschland vertreten. Oftmals gibt es auch eine *Aufgabe des Monats*, die man dann auch einschicken kann. Mathematische Wettbewerbe gibt es nicht so viele für die Kleinsten. Die Mathematik-Olympiade geht in der 5.Klasse los. <http://www.mathematik-olympiaden.de/> Zu empfehlen für Grundschüler ist der **Känguru-Wettbewerb**. Er beginnt bereits in Klasse 3. Knobelaufgaben mit Lösungen von den letzten 4 Jahren findet man unter <http://www.mathe-kaenguru.de/>

Ab Klasse 5 findet der Adam-Ries-Wettbewerb statt. Hier gibt es eine Broschüre, die vom Chemnitzer Bezirkskomitee vertrieben wird: Peter Haase, Helmut König, 15 Jahre Adam-Ries-Wettbewerb für Schüler der Klasse 5 – ein Beitrag zur Förderung mathematisch interessierter Schüler.

Hier kann man diese Broschüre und weiteres Aufgabenmaterial bestellen:

<http://people.freenet.de/bezirkskomitee/ingang.htm>

Eine sehr gute Internet-Seite mit Knobelaufgaben für alle Altersgruppen, angefangen mit Vorschülern, findet man hier:

[http://www.egladil.de/mathe/mathehome\\_frames.html](http://www.egladil.de/mathe/mathehome_frames.html)

Die Verfasserin dieser Seiten, Dr. Heike Winkelvoß, erklärt, wie das Ganze funktioniert: „Diese Seiten sind für Menschen von 4 bis  $100 + x, x > 0$ , die Freude am Knobeln haben. Eine Mathe- AG- Runde umfasst immer 8 Serien der Monate Oktober bis Mai. Am Montag, der auf den 1. jedes Monats folgt, erscheint auf der Aufgabenseite eine neue Knobelserie. Die Lösungen können per e-mail bis zum Vortag der folgenden Serie geschickt werden und werden von mir individuell beantwortet. Die Lösungen der alten Serien können im Archiv nachgelesen werden. Jede Teilnehmerin und jeder Teilnehmer kann mir Lösungen zu Aufgaben ihrer bzw. seiner Klassenstufe oder einer höheren schicken. Bei Erwachsenen zählen Lösungen der Klassen 11 bis 13. Lösungen niedrigerer Klassenstufen werden auch begutachtet, gehen aber nicht in die Wertung ein. Daher bitte immer Alter und Klassenstufe mit angeben. Ab Klasse 5/6 erwarte ich eine Begründung der Lösung, auch wenn sie in der Aufgabenstellung nicht ausdrücklich gefordert wird. Erst- bis Viertkläßler können das Begründen der Lösung ja schon mal üben. Für jede bearbeitete Aufgabenserie gibt es ein Winkelchen. Wer mir selbst erdachte Aufgaben MIT Lösung schickt, bekommt ein Erfinderwinkelchen. Für jeweils 10 solcher Punkte bekommt man ein Diplom. Die gesammelten Punkte können in die nächste Runde mitgenommen werden, falls sie nicht für ein Diplom reichen. Kinder, die Aufgaben höherer Klassenstufen richtig lösen, können Frühstarterpunkte sammeln. Dafür muß die Lösung in jedem Fall vollständig begründet sein. Einen Pffikuspunkt kann man man für eine besonders schöne Lösung erhalten. Am Ende jeder Runde bekommen die fleißigen Frühstarter- und Pffikuspunkte- SammlerInnen Anerkennungen “

Viele *Knobelaufgaben* (Zahlenrätsel, Sudokus, Schiffe versenken) findet man hier

[http://www.raetselmann.de/index\\_c.html](http://www.raetselmann.de/index_c.html)

## Nimm-Spiele

Die meisten dieser Spiele sind dem Heftchen „Potsdamer Forschungen“, [2] entnommen. **Ein Haufen** Es spielen zwei Spieler gegeneinander. Die Spieler haben einen Haufen mit 18 Hölzchen vor sich.

Die Spieler nehmen abwechselnd ein, zwei oder drei Hölzchen vom Haufen. Wer das

letzte Hölzchen nimmt, hat gewonnen.

Es gibt eine einfache Gewinnstrategie für den Anziehenden.

**Zwei Haufen** Zwei Spieler nehmen von 2 gegebenen Haufen abwechselnd Hölzchen weg. Dabei dürfen sie immer von *einen* Haufen beliebig viele Hölzchen wegnehmen. Wer das letzte Hölzchen nimmt, hat gewonnen.

Strategie: Man muss stets versuchen, eine *symmetrische* Situation herzustellen, d. h. wo in beiden Haufen gleich viele Hölzchen sind. Der Gegner muss dann gezwungenermaßen eine unsymmetrische Situation erzeugen, kann also nie 0 – 0 erreichen.

**Mehrere Haufen** Man hat 5 Häufchen mit jeweils 3 Hölzern und die selben Spielregeln wie beim Spiel mit 2 Haufen.

Strategie: Der erste Spieler nimmt einen Haufen ganz weg und beantwortet die Züge seines Gegners „symmetrisch“.

**Hölzer im Kreis** Hölzchen sind in einem Kreis angeordnet. Die Spieler dürfen abwechselnd ein oder zwei *benachbarte* Hölzchen entfernen. Wer das letzte Hölzchen nimmt, hat gewonnen.

Strategie: Auch hier ist die Schlussituation symmetrisch. Die Strategie ergibt sich hieraus.

## Addition von natürlichen Zahlen

**6 Nimmt** Jeder Spieler erhält 10 Karten aus einem Stapel von Zahlenkarten mit den Zahlen von 1 bis 104. Auf jeder Karte befinden sich bis zu 7 Hornochsen. Wer am Ende die meisten Hornochsen hat (nicht die meisten Karten), verliert.

Zunächst werden beliebige 4 Zahlenkarten aufgedeckt und untereinander offen abgelegt. In einem Zug wählt jeder Spieler eine Karte und legt sie verdeckt vor sich ab. Haben alle Spieler ihre Karte abgelegt, werden sie aufgedeckt und nach der folgenden Regel an die 4 Kartenreihen (die anfangs nur aus einer Karte bestehen) angelegt. Zuerst legt der Spieler mit der niedrigsten Zahl an, dann der mit der zweitniedrigsten usw. Er muss anlegen, wenn seine Zahl größer ist als die Zahl am Ende einer der 4 Kartenreihen. Hat er mehrere Möglichkeiten, so muss er da anlegen, wo die Differenz zum Ende am Kleinsten ist. Wenn seine Karte die sechste ist, die in der Reihe liegt, muss er die 5 anderen aufnehmen und seine Karte bleibt als neue Startkarte liegen. Ist seine Zahl aber kleiner als alle vier Endzahlen, so muss er eine beliebige der 4 Reihen aufnehmen und seine Karte bildet wieder die neue Startkarte.

**Wer 1 sagt, hat verloren** (übermittelt von Johannes Waldmann) Zwei Personen schreiben abwechselnd natürliche Zahlen,  $a_1, a_2, a_2, \dots$  auf einen Zettel. Die Bedingung lautet:  $a_{n+1}$  lässt sich nicht als Vielfachensumme der  $a_1, a_2, \dots, a_n$  aufschreiben — Differenzen sind erlaubt. Die Forderung lautet also

$$a_{n+1} \neq \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i, \quad \text{für alle } n\text{-Tupel } (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \text{ von natürlichen Zahlen.}$$

Man kann zeigen, dass beginnend mit *teilerfremden* Zahlen  $a_1$  und  $a_2$  nur noch Zahlen kleiner als  $(a_1 - 1)(a_2 - 1)$  aufgeschrieben werden dürfen.

## Spiele auf kariertem Papier

**Wer erreicht h8?** Auf einem Schachbrett steht ein Spielstein auf a1 (linke untere Ecke). Zwei Spieler schieben diesen Stein abwechselnd auf ein benachbartes Feld, dabei sind nur Züge erlaubt, die nach oben, nach rechts oder nach rechts oben führen. Sieger ist, wer den Stein auf h8 schiebt (rechte obere Ecke).

Gewinnstrategie: Der erste Spieler zieht auf b2 und wiederholt dann immer die Züge seines Gegners. Wie sieht die Gewinnstrategie aus, wenn derjenige *verliert*, der auf h8 setzen muss?

**4 gewinnt** Zwei Spieler versuchen, auf kariertem Papier eine zusammenhängende Kette von vier Kästchen zu bilden (waagrecht, senkrecht oder diagonal). Ein Spieler zeichnet Kreuze, der andere Kreise in das Spielfeld ein. Dabei muss beachtet werden, dass an der unteren Spielfeldkante begonnen wird und die Symbole nicht „herunterfallen“ dürfen, sich also „unter“ jedem Kreuz bzw. Kreis ein schon besetztes Feld befinden muss. Wer zuerst 4 Kästchen in einer Reihe besetzt hat, hat gewonnen.

Varianten: a) 5 in einer Reihe (ohne „Gravitationskraft“) b) 4 in einer Reihe, wobei die Symbole nach unten *und* nach links fallen c) Man zeichnet sich vier  $4 \times 4$ -Quadrate als Spielfelder neben einander, welche die vier Schichten eines  $4 \times 4 \times 4$ -Würfels sind. Ziel ist es, 4 Kreuzchen waagrecht, senkrecht, raumdiagonal oder flächendiagonal einzuzeichnen.

**Brückenbau** Es werden auf kariertem Papier zwei gegeneinander verschobene Gitternetze gezeichnet. Zwei Spieler ziehen abwechselnd. Ein Spieler zeichnet mit einem roten Stift, der andere benutzt blau. In einem Zug verbindet ein Spieler je zwei waagrecht oder senkrecht benachbarte Punkte seines Gitters durch eine Linie. Die Linien dürfen sich nicht kreuzen.

Ziel des Spieles ist es, dass Spieler A das Feld von oben nach unten, Spieler B von links nach rechts überbrückt. Sieger ist derjenige, dem die erste durchgehende Brücke gelungen ist.

## Andere logische Spiele

**SET!** Ein Kartenspiel. Jede Karte ist gekennzeichnet durch 4 Merkmale, die jeweils 3 verschiedene Ausführungen besitzen: Form (Rechteck, Oval, Welle), Farbe (lila, rot, grün), Anzahl (1,2,3) und Füllung (leer, voll, halbvoll). Ein *Set* besteht immer aus 3 Karten mit der folgenden Eigenschaft:

Für jedes der 4 Merkmale gilt: Bei allen drei Karten ist dieses Merkmal gleich oder bei allen drei Karten ist dieses Merkmal verschieden.

12 Karten sind immer aufgedeckt und mehrere Spieler versuchen so schnell wie möglich ein Set zu entdecken. Vorteil: Alle Mitspieler spielen gleichzeitig.

Die Kombinationsgabe wird geschult.

Ravensburger, ca. 10€, Kaufhof

**Continuo** Quadratische vierfarbige  $4 \times 4$ -Kärtchen sollen wie beim Domino aneinander gelegt werden. Wer die längsten einfarbigen Schlangen bildet, bekommt die meisten Punkte.

Ebene geometrische Vorstellung wird geschult.

Schmidt, ca. 6€, Karstadt

**Rasende Roboter** 4 farbige Roboter ziehen auf einem Gitter waagrecht oder senkrecht. Sie können anhalten oder ihre Richtung ändern nur, wenn sie auf ein Hindernis treffen (Spielfeldrand, Mauer, anderer Roboter). Ziel ist, mit möglichst wenig Zügen (das heißt, Richtungsänderungen) mit einem fixierten Roboter ein bestimmtes Feld zu erreichen. Dabei dürfen auch die anderen 3 Roboter bewegt werden und als Hindernisse geeignet plaziert werden. Der Weg, manchmal 5 Züge, manchmal aber auch 25 Züge, muss im Kopf gefunden werden.

Hans im Glück, ca. 30€, nicht mehr im Handel, aber es gibt eine erweiterte Neuauflage unter dem Namen „Ricochet Robots“ zu 23€ im Spiel Laden „Capito“ Städtisches Kaufhaus, Gewandgäßchen, 04109 Leipzig.

**Rush Hour** Ein bestimmtes Auto soll den Weg zum Ausgang finden. Alle Autos blockieren sich gegenseitig auf einem kleinen Spielfeld. Sie können immer nur kleine Schritte vor und zurück. In welcher Reihenfolge müssen die Autos verschoben werden, damit das eine Auto heraus kann? Dieses Spiel gibt es auch im Internet, siehe unten.

Die schwierigere Version *Railroad Rush Hour* ist zu bestellen bei *Binary Arts* im Internet unter <http://www.binaryarts.com/01ourproducts.htm>, ca. 25€

## Puzzles

Hier finden Sie einige Puzzles zum Selbstbauen. Ein zerfallener Buchstabe H oder T oder ein Kreuz oder ein Schachbrett sind wieder zusammenzulegen. Einige dieser Puzzle finden Sie beim beigelegten Arbeitsmaterial im Briefumschlag: a) Das zerfallene Schachbrett — 8 Teile, b) Die 4 Asse — 9 quadratische Karten sind zu einem großen Quadrat so zusammen zu legen, dass jeweils die zwei Hälften der Asse an sich berührenden Kanten zusammen passen, c) Das zerfallene (Kirchen-)Kreuz — 4 Z-förmige Teile und 2 hakenförmige Teile sind zu einem Kreuz zusammen zu legen.

[http://www.puzzles.ca/diy\\_puzzles.html](http://www.puzzles.ca/diy_puzzles.html)

## Sudokus

In einem quadratischen  $9 \times 9$ -Feld sind in jedes Kästchen Ziffern von 1 bis 9 so einzutragen, dass in jeder Zeile, jeder Spalte und in jedem der neun hervorgehobenen  $3 \times 3$ -Quadrate die Ziffern von 1 bis 9 genau einmal vorkommen. Dabei sind in der Regel 20 bis 30 der 81 Einträge schon vorgegeben.

4				9		8	<u>5</u>	1
	5				2	6	7	
					5	3		
3	9				6			4
		5	4	1			6	8
				2				
	3		7	8		4		6
	8			3	9		1	5
	6					7		

Im obigen Beispiel muss etwa die vorletzte Ziffer der ersten Zeile eine 5 sein, denn im ersten Block ist in der zweiten Zeile eine 5, im zweiten Block ist in der dritten Zeile eine 5, also muss im dritten Block die 5 in der ersten Zeile stehen. Da dort nur noch das mittlere Feld frei war, muss genau dahin die 5.

Sudokus gibt es in Rätselzeitschriften wie etwa „Logisch“, im Internet unter <http://www.websudoku.com> oder [www.zeit.de/sudoku](http://www.zeit.de/sudoku). Vorsicht: Man wird leicht süchtig!

## Mathematische Spiele online

<http://www.igoweb.org/~wms/rushHour/>

Rush Hour. Beschreibung, siehe oben. Es gibt in jeder Woche ein leichtes (5 bis 6 Züge), mittleres (bis 20 Züge) und ein schweres Rätsel.

<http://home.wanadoo.nl/mike.henkes/>

Ein Schiebespiel: Ein Stab über 3 Längeneinheiten soll transportiert werden mit Transportboxen: Dies ist ein recht schwierig scheinendes Schiebe-Puzzle, das man mit der Computermaus machen kann.

<http://www.mazeworks.com/home.htm>

Hier findet man 12 sehr schöne, teils bekannte Denkspiele, wie Solitär, Turm von Hanoi, Sliders, Das 15er Spiel, eine Schachaufgabe, Hase und Jäger, Tac Tix.

<http://www.mazeworks.com/tactix/index.htm>

Tac Tix ist ein Nimm-Spiel auf einem  $4 \times 4$  Feld. *Benachbarte* Steine *einer* Zeile oder Spalte dürfen genommen werden. Bis zu vier Steine sind also möglich. Wer den letzten Stein nimmt, hat verloren.

**Attribution Section**

schueler (2006-03-17): Contributed to KoSemNet