

# Abzählen von Färbungen — Das Cauchy-Frobenius- oder Burnside-Lemma

Axel Schüler

Leipzig, 2006

Wir wollen hier das Burnside Lemma formulieren und beweisen. Dann wollen wir es anwenden auf das Abzählen von Färbungen eines symmetrischen Körpers. Hierbei wollen wir nicht den Begriff des Zyklenzeigers verwenden.

## 1 Bezeichnungen

Im folgenden sei  $X$  eine Menge,  $G$  eine endliche Gruppe, die auf  $X$  wirkt, das heißt, jedem Gruppenelement  $g \in G$  entspricht eine Abbildung, bezeichnet durch  $g.$ , von  $X$  in  $X$  mit  $e.x = x$  und  $(gh).x = g.(h.x)$  für alle  $g, h \in G$  und alle  $x \in X$ . Für jedes  $g \in G$  bezeichne  $X^g = \{x \in X \mid g.x = x\}$ , die Teilmenge der Elemente von  $X$ , die unter der Wirkung von  $g$  fest bleiben. Für jedes  $x \in X$  sei  $G_x = \{g \in G \mid g.x = x\}$  der **Stabilisator** von  $x$  ( $G_x$  ist eine Untergruppe in  $G$ ) und  $G(x) = \{g.x \mid g \in G\}$  das **Orbit** von  $x$  unter  $G$ . Schließlich sei  $X/G$  die Menge der Orbits der Gruppenwirkung. Die Anzahl der Elemente einer Menge  $A$  sei mit  $|A|$  bezeichnet.

**Lemma 1** Es sei  $G$  eine endliche Gruppe, die auf der Menge  $X$  wirkt. Dann gilt für jedes  $x \in X$

$$|G| = |G(x)| \cdot |G_x|.$$

*Beweis:* Wir benutzen das doppelte Abzählen der Relation  $S = \{(g, y) \in G \times X \mid y = g.x\}$ . Klar ist, für jedes  $g \in G$  gibt es genau ein  $y \in X$  mit  $y = g.x$  und somit ist  $|S| = |G|$ . Umgekehrt gibt für  $y \in G(x)$ , etwa  $y = g_0.x$ , genau  $|G_x|$  Elemente  $h \in G$  mit  $h.x = y$ . Das sind nämlich genau die Elemente  $h = g_0g$  mit  $g \in G_x$ . Liegt  $y$  nicht im Orbit von  $x$ ,

---

This material belongs to the Public Domain KoSemNet data base. It can be freely used, distributed and modified, if properly attributed. Details are regulated by the *Creative Commons Attribution License*, see <http://creativecommons.org/licenses/by/3.0>.

For the KoSemNet project see <http://www.lsgm.de/KoSemNet>.

so gibt es kein  $(g, y) \in S$ . Folglich ist

$$|S| = |G| = \sum_{y \in G(x)} |G_x| = |G(x)| |G_x|.$$

□

**Lemma 2** Unter den Voraussetzungen von Lemma 1 gilt

$$\sum_{g \in G} |X^g| = \sum_{x \in X} |G_x|. \quad (1)$$

*Beweis:* Wir benutzen das doppelte Abzählen für die Relation  $T = \{(g, x) \in G \times X \mid g.x = x\}$ . Für ein festes  $h \in G$  ist  $\{(h, x) \mid x \in X^h\}$  gerade die Menge der Paare in  $T$  mit erster Koordinate gleich  $h$ . Umgekehrt ist für ein festes  $z \in X$  die Menge der Paare in  $T$  mit zweiter Koordinate gleich  $z$  gerade  $\{(g, z) \mid g \in G_z\}$ . Folglich gilt

$$\sum_{h \in G} |X^h| = |T| = \sum_{z \in X} |G_z|.$$

□

**Lemma 3 (Lemma von Burnside)** Für die Anzahl der Orbits  $|X/G|$  der Gruppenwirkung von  $G$  auf  $X$  gilt

$$|X/G| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X^g|. \quad (2)$$

*Beweis:* Wir benutzen die Formel (1) und sortieren die Summanden auf der rechten Seite nach gleichen Stabilisatoren; insbesondere haben alle Elemente  $y \in G(x)$  eines Orbits gleich große Stabilisatoren  $G_x$ . In der Tat, wenn  $g \in G_x$  und  $y = g_0.x$ , dann ist  $g.x = x$  und damit  $(g_0g).x = g_0.x$ , also  $(g_0gg_0^{-1}).(g_0.x) = g_0.x$ . Durchläuft also  $g$  den Stabilisator  $G_x$ , so durchläuft  $g_0G_xg_0^{-1}$  den Stabilisator von  $y = g_0.x$ . Diese Mengen sind aber gleich groß, sie haben  $|G_x|$  Elemente.

Nach Lemma 1 ist  $|G_x| = |G|/|G(x)|$  und weiter:

$$\sum_{h \in G} |X^h| = \sum_{A \in X/G} \sum_{x \in A} |G_x| = \sum_{A \in X/G} |A| \frac{|G|}{|A|} = \sum_{A \in X/G} |G| = |X/G| \cdot |G|.$$

Teilt man durch  $|G|$ , so erhält man die Behauptung. □

*Bemerkung:* William Burnside schrieb diese Formel um 1900 auf. Mathematikhistoriker jedoch fanden diese Formel auch schon bei Cauchy (1845) und Frobenius (1887). Daher wird diese Formel auch mitunter bezeichnet als die *Formel, die nicht von Burnside stammt*.

## 2 Anwendungen

**Beispiel 1** Wir wählen als  $G$  die drei Drehungen eines Würfels  $ABCDEFGH$  um die Raumdiagonale  $AG$  und  $X$  sei die Eckenmenge des Würfels. Dann ist  $X^e = E$ ,  $X^{D_{2\pi/3}} = X^{D_{4\pi/3}} = \{A, G\}$ . Folglich ist die Anzahl der Orbits gleich

$$|X/G| = \frac{1}{3} (8 + 2 + 2) = 4.$$

In der Tat sind die vier Orbits gleich  $\{A\}$ ,  $\{G\}$ ,  $\{B, E, D\}$  und  $\{C, F, H\}$ .

**Aufgabe 1 (Känguru-Wettbewerb 2006, Klasse 11/13, A26)** Auf wie viele Arten lassen sich die sechs Flächen eines Würfels mit sechs verschiedenen Farben färben? Jede Farbe tritt dabei genau einmal auf. Zwei Färbungen heißen gleich, wenn sie durch Drehung ineinander überführt werden können.

*Lösung:* Es sei  $G = S_4$  die Würfelgruppe bestehend aus den 24 Drehungen des Würfels und  $X$  die Menge der  $6!$  verschiedenen Färbungen der Seitenflächen. Bei jeder *echten* Drehung bleibt keine Färbung fixiert, also ist  $X^g = \emptyset$  für alle  $g \neq e$ . Für das Einselement hingegen ist  $X^e = X$ . Somit gibt es

$$|X/G| = \frac{|X|}{|G|} = \frac{6!}{4!} = 30$$

verschiedene Färbungen.

**Aufgabe 2** Bestimme alle möglichen Färbungen der Würfecken mit rot und blau, wobei zwei Ecken rot und sechs Ecken blau gefärbt sein sollen.

*Lösung:* Es ist klar, dass es nur drei solche Färbungen geben kann, denn die beiden roten Ecken können entweder benachbart sein, oder sie sind flächendiagonal gegenüberliegend oder raumdiagonal gegenüberliegend. Wir wollen trotzdem das Burnside Lemma anwenden. Wieder ist  $G = S_4$  die Würfelgruppe und  $X$  die Menge der  $\binom{8}{2} = 28$  rot-blau-Färbungen der Eckenmenge. Bei jeder  $\pm 90^\circ$ -Drehung bleibt keine Färbung fix. Bei jeder der 9 Drehungen um  $180^\circ$  bleiben immer vier Färbungen fix und zwar gibt es immer vier Paare von Ecken, die gegenseitig auf sich abgebildet werden, immer ein Paar kann man als rotes Paar auswählen. Schließlich gibt es bei den acht  $\pm 120^\circ$ -Drehungen jeweils eine fest bleibende Färbung, wobei die beiden diagonalen Punkte auf der Drehachse rot gefärbt sind. Folglich erhalten wir als Anzahl der Orbits

$$\frac{1}{24} (28 + 9 \cdot 4 + 8 \cdot 1) = 3.$$

**Aufgabe 3** Bestimme die Anzahl aller möglichen Färbungen der Würfelflächen mit drei Farben.

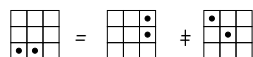
*Lösung:* Es sei  $G = S_4$  die Würfelgruppe und  $X$  die Menge aller  $6^3$  Färbungen der sechs Würfel­flächen mit drei Farben. Wir betrachten die Fixelemente der einzelnen Würfel­drehungen:

Drehung $g$	konj. El.	ein­farbig	$ X^g $
Identität	1	egal	$3^6$
Drehung um $90^\circ$	6	Deckel(1) , Boden(1), Mantel(4)	$3^3$
Drehung um $180^\circ$ um Achsen	3	Deckel(1), Boden(1), M(2), M(2)	$3^4$
Drehungen um $120^\circ$	8	Deckel(3), Boden(3)	$3^2$
Drehungen um $180^\circ$	6	Deckel(2), Mantel(2) , Boden(2)	$3^3$

Die Anzahl der Färbungen beträgt daher

$$\frac{1}{24} (3^6 + 6 \cdot 3^3 + 3 \cdot 3^4 + 8 \cdot 3^2 + 6 \cdot 3^3) = 57.$$

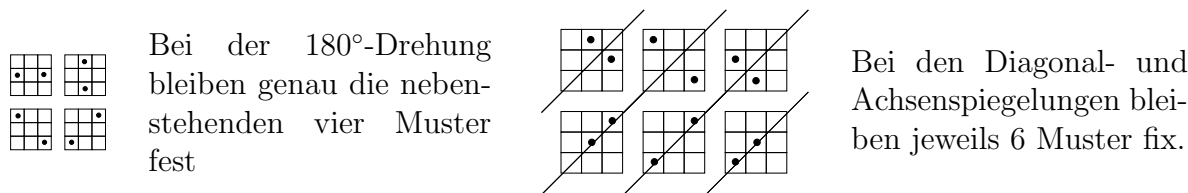
**Aufgabe 4 (Lochkartenproblem)** Aus quadratischen  $3 \times 3$ -Kärtchen sollen durch Ausstanzen von genau zwei Löchern Identitätskarten hergestellt werden.



Wie viele unter Drehen und Wenden verschiedene Karten lassen sich herstellen?

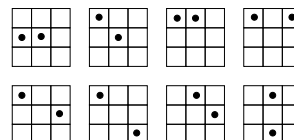
*Lösung:* Es ist  $G = D_4$  – die Diedergruppe mit  $|D_4| = 8$  Elementen. Der Konfigurationsraum  $X$  besteht aus den  $\binom{9}{2} = 36$  möglichen Kombinationen von zwei Löchern auf 9 Feldern. In  $G$  gibt es fünf verschiedene Klassen von Elementen: die Identität  $e$ , zwei Drehungen  $d_+$  und  $d_-$ , um  $90^\circ$  bzw. um  $-90^\circ$ , eine Drehung  $d_2$  um  $180^\circ$ , zwei Spiegelungen an achsenparallelen Geraden und zwei Spiegelungen an Diagonalen.

Wie immer lässt die Identität alle  $|X| = 36$  Elemente fix, wogegen die beiden Drehungen  $d_\pm$  gar keine Konfiguration fest lassen, da genau ein Kästchen in sich geht und alle anderen 8 Kästchen erst nach vier Drehungen wieder an ihrem Ort sind.



Damit ergeben sich nach dem Lemma von Burnside

$$|X/G| = \frac{1}{8} (36 + 4 + 4 \cdot 6) = \frac{64}{8} = 8$$



verschiedene Muster. Dies sind genau die nebeneinanderstehenden.

**Aufgabe 5** Wie viele verschiedene Perlenketten lassen sich aus zwei roten, drei blauen und vier grünen Perlen zusammensetzen, wenn

- die Ketten einen Anfang und ein Ende haben (lineare Kette) bzw.
- die Ketten geschlossen sein sollen (zyklisch).

*Lösung:* Der Konfigurationsraum  $X$  besteht aus allen

$$\frac{9!}{2!3!4!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{2 \cdot 3 \cdot 2} = 63 \cdot 20 = 1260$$

Permutationen von 9 Elementen mit Wiederholung.

a) Die Symmetriegruppe ist  $G = \mathbb{Z}_2$ , denn man kann nur Anfang und Ende der Kette vertauschen — das sei  $g \in \mathbb{Z}_2$ . Wir ermitteln die Mutser, die unter  $g$  fest bleiben. Da eine ungerade Anzahl von blauen Perlen existieren, muss die mittelste Perle blau sein und die vier ersten Positionen mit zwei grünen und jeweils einer blauen und roten Perle besetzt sein. Dafür gibt es  $\frac{4!}{1!1!2!} = 12$  Möglichkeiten. Nach Frobenius gibt es also

$$\frac{1}{2} (1260 + 12) = \frac{1272}{2} = 636$$

verschiedene Ketten.

b) Bei einer geschlossenen Kette ist die Symmetriegruppe die  $D_9$  mit 18 Elementen — 9 Drehungen und 9 Spiegelungen. Da es keine Drehung der Ordnung 2 gibt, kann keine Anordnung der zwei roten Kugeln stabilisiert werden. Bei den 9 Spiegelungen muss in der Mitte (auf der Spiegelungsachse) wieder eine blaue Perle sein und rechts von der Achse wieder zwei grüne, eine blaue und eine rote Perle, was wie in a) 12 Anordnungen liefert. Demnach gibt es

$$\frac{1}{18} (1260 + 9 \cdot 12) = \frac{9 \cdot 7 \cdot 20}{2 \cdot 9} + 6 = 76$$

verschiedene Muster für geschlossenen Ketten.

## Literatur

- [1] W. Burnside, *Theory of Groups of Finite Order*, 2 ed., Dover Publications, New York, 1955.
- [2] R. Tarjan G. Pólya and D. R. Woods, *Notes on introductory combinatorics*, Progress in Computer Science, no. 4, Birkhäuser, Boston, 1983.
- [3] G. Pólya, *Kombinatorische Anzahlbestimmungen für Gruppen, Graphen und chemische Verbindungen*, Acta Math. **68** (1937), 145–254.

- [4] G. Pólya and R. C. Read, *Combinatorial enumeration of groups, graphs, and chemical compounds*, Springer-Verlag, New York, 1987.

Siehe auch

- <http://lsgm.uni-leipzig.de/KoSemNet/pdf/graebe-05-2.pdf>
- <http://encyclopedia.thefreedictionary.com/Cauchy-Frobenius%20lemma>