Über Schnittpunkte von Diagonalen in regulären n-Ecken

Axel Schüler, Mathematisches Institut, Univ. Leipzig

mailto:schueler@mathematik.uni-leipzig.de

Dezember 2002

Aufgabe 1 Es sei p eine nichtnegative ganze Zahl, $n = 6p + 9$ und $k = 2p + 3$.
Beweisen Sie, dass sich im regulären $2n$-Eck $P_0P_1 \cdots P_{2n-1}$ die Diagonalen $P_{n+1}P_k$, $P_{n+2}P_{k+2}$ und $P_{n-p}P_{2n-p}$ in einem Punkt schneiden.

Lösung: Wir benutzen den Satz von Ceva in seiner trigonometrischen Form: Es sei ABC ein Dreieck mit den Ecktransversalen AP, BQ und CR und den Winkeln $\angle CAP = \alpha_1$, $\angle BAP = \alpha_2$, $\angle ABQ = \beta_1$, $\angle CBQ = \beta_2$, $\angle BCR = \gamma_1$ und $\angle ACR = \gamma_2$.
Die Ecktransversalen AP, BQ und CR schneiden genau dann einander in einem Punkt, wenn

$$\sin\alpha_1 \sin\beta_1 \sin\gamma_1 = \sin\alpha_2 \sin\beta_2 \sin\gamma_2. \tag{1}$$

Beweis: Nur für den Beweis mögen P, Q und R auf den Seiten $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ bzw. $\overline{AB}$ liegen. Nach dem Satz von Ceva verlaufen die drei Geraden genau dann durch einen gemeinsamen Punkt, wenn

$$\frac{\overline{AQ}\cdot\overline{BP}\cdot\overline{CR}}{\overline{QB}\cdot\overline{PC}\cdot\overline{RA}} = 1. \tag{2}$$

Nach dem Sinussatz in den Dreiecken ABP und ACP gilt

$$\frac{\overline{BP}}{\sin\alpha_2} = \frac{c}{\sin\angle APB}, \quad \frac{\overline{CP}}{\sin\alpha_1} = \frac{b}{\sin\angle APC}.$$

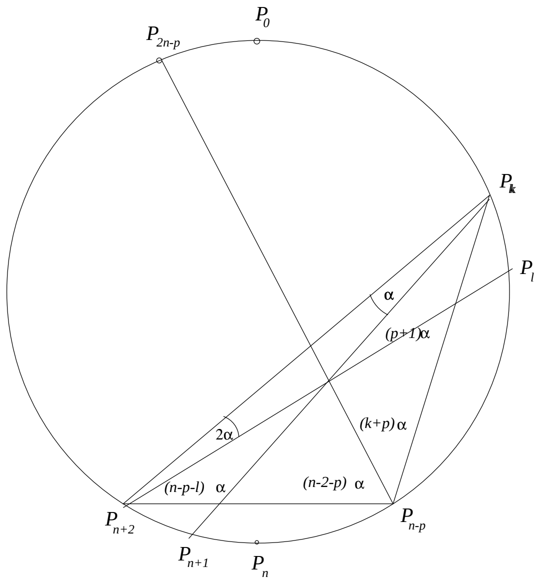
Bildet man den Quotienten aus diesen beiden Gleichungen, so hat man wegen $\sin\angle APB = \sin\angle APC$

$$\frac{\overline{BP}}{\overline{PC}} = \frac{c\cdot\sin\alpha_2}{b\cdot\sin\alpha_1}.$$

Analog erhält man

$$\frac{\overline{CQ}}{\overline{QA}} = \frac{a\cdot\sin\beta_2}{c\cdot\sin\beta_1} \quad \text{und} \quad \frac{\overline{AR}}{\overline{RB}} = \frac{b\cdot\sin\gamma_2}{a\cdot\sin\gamma_1}.$$

Das Produkt dieser drei Gleichungen liefert die Behauptung. □



Wir wenden nun diesen Satz an auf das Dreieck mit den Eckpunkten $A = P_{n+2}$, $B = P_{n-p}$, $C = P_k$ und den Ecktransversalen AP_l, BP_{2n-p} und CP_{n+1}. Setzt man die Größe des Peripheriewinkels $\alpha := \angle P_1 P_n P_2$, so hat man nach dem Peripheriewinkelsatz und mit $k = l + 2$ und den obigen Bezeichnungen

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= (l-k)\alpha, & \alpha_2 &= (n-p-l)\alpha, \\ \beta_1 &= (n-2-p)\alpha, & \beta_2 &= (p+k)\alpha, \\ \gamma_1 &= (p+1)\alpha, & \gamma_2 &= \alpha. \end{aligned}$$

Hierbei ist $\alpha = \pi/(2n)$.

Beachtet man die in der Aufgabe angegebenen Werte von k, l und n, so ist wegen $l - k = 2$, $n - 2 - p = 5p + 7$, $n - p - l = 3p + 4$ und $p + k = 3p + 3$ die Bedingung aus dem Satz von CEVA äquivalent zu

$$\sin(3p+3)\alpha \cdot \sin\alpha \cdot \sin(3p+4)\alpha = \sin(5p+7)\alpha \cdot \sin(p+1)\alpha \cdot \sin 2\alpha. \tag{3}$$

Wir beweisen diese Gleichung. Wegen $\alpha = \pi/(12p+18)$ ist $\sin(2p+3)\alpha = \sin\pi/6 = 1/2$. Also gilt

$$2\cos\alpha\, \sin((2p+2)\alpha + \alpha) = 2\cos\alpha\, \sin(2p+3)\alpha = \cos\alpha.$$

Wendet man das Additionstheorem für den Sinus an sowie $1 - 2\sin^2 x = \cos 2x$ und $2\sin x \cos x = \sin 2x$, so hat man

$$\begin{aligned} 2\cos^2\alpha\, \sin(2p+2)\alpha + \sin 2\alpha\, \cos(2p+2)\alpha &= \cos\alpha. \\ 2\cos^2\alpha\, \sin(2p+2)\alpha + (1 - 2\sin^2(p+1)\alpha)\, \sin 2\alpha &= \cos\alpha. \end{aligned}$$

Subtrahiert man $\sin 2\alpha$ und beachtet erneut die Doppelwinkelformel, so hat man

$$\begin{aligned} 2\cos^2\alpha\, \sin(2p+2)\alpha - 2\sin^2(p+1)\alpha\, \sin 2\alpha &= \cos\alpha - \sin 2\alpha \\ 4\cos^2\alpha\, \sin(p+1)\alpha\, \cos(p+1)\alpha - 4\sin^2(p+1)\alpha\, \sin\alpha\, \cos\alpha &= \cos\alpha - \sin 2\alpha \\ 4\cos\alpha\, \sin(p+1)\alpha\big(\cos(p+1)\alpha\, \cos\alpha - \sin(p+1)\alpha\, \sin\alpha\big) &= \cos\alpha - \sin 2\alpha \\ 4\cos\alpha \sin(p+1)\,\alpha \cos(p+2)\alpha &= \cos\alpha - \sin 2\alpha. \end{aligned}$$

In der letzten Umformung benutzten wir das Additionstheorem für den Kosinus. Beachtet man nun $(p+2)\alpha + (5p+7)\alpha = 2\alpha + (6p+7)\alpha = \pi/2$ und $\sin x = \cos(\pi/2 - x)$, so kann man weiter umformen zu

$$\begin{aligned} 4\cos\alpha\, \sin(p+1)\alpha\, \sin(5p+7)\alpha &= \cos\alpha - \cos(6p+7)\alpha \\ 4\cos\alpha\, \sin(p+1)\alpha\, \sin(5p+7)\alpha &= 2\sin(3p+3)\alpha\, \sin(3p+4)\alpha, \end{aligned}$$

wobei wir $-\cos a + \cos b = 2\sin(a+b)/2 \sin(a-b)/2$ benutzten. Dividiert man die obige Gleichung durch 2, multipliziert mit $\cos\alpha$ und beachtet die Doppelwinkelformel, so hat man

$$\sin 2\alpha\, \sin(p+1)\alpha\, \sin(5p+7)\alpha = \sin\alpha\, \sin(3p+3)\alpha\, \sin(3p+4)\alpha.$$

Damit ist die Behauptung gezeigt; die drei Diagonalen verlaufen durch einen Punkt.

Aufgabe 2 (a) (COXETER, Unvergängliche Geometrie) In einem Viereck $ABCD$ sind die folgenden Winkel gegeben $\angle BAD = \angle ABC = 80^\circ$, $\angle ABD = 50^\circ$ und $\angle BAC = 60^\circ$. Man bestimme die Größe des Winkels $\angle BCD$!
(b) In einem Viereck $ABCD$ sind die folgenden Winkel gegeben $\angle BAD = \angle ABC = 84^\circ$, $\angle ABD = 54^\circ$ und $\angle BAC = 66^\circ$. Man bestimme die Größe des Winkels $\angle BCD$!

Lösung: (a) Wir benutzen für die Lösung die Aufgabe 1 mit $p = 0$. Mit $p = 0$ haben wir $n = 9$, $k = 3$, $l = 5$, $\alpha = 10^\circ$. Wir betten das Viereck $ABCD$ ein in ein reguläres 18-Eck $P_0P_1 \cdots P_{17}$ mit $A = P_{10}$ und $B = P_9$. Wir zeigen, dass D der Schnittpunkt S der Diagonalen P_1P_{10} und P_9P_{15} ist und C der Schnittpunkt T der Diagonalen P_0P_9, P_3P_{10} und P_5P_{11} ist (wegen Aufgabe 1 gehen diese 3 durch einen gemeinsamen Punkt). Aus Symmetriegründen liegt S auch auf der Diagonalen P_5P_{11}.
Klar ist, dass $\angle ABC = \angle BAD = 8\alpha = 80^\circ$ gilt. Ferner ist $\angle ABS = (15-10)\alpha = 5\alpha = 50^\circ$. Folglich git $D = S$. Außerdem ist $\angle CAB = \angle P_3AP_9 = 6\alpha = 60^\circ$. Somit ist $C = T$. Damit ist aber klar, dass nach Außenwinkelsatz im Dreieck P_5P_9C gilt $\angle BCD = \angle BP_5P_{11} + \angle P_0BP_5 = 2\alpha + 5\alpha = 7\alpha = 70^\circ$.
(b) Wir betten das Viereck in ein regelmäßiges 30-Eck $P_0P_1 \cdots P_{29}$ mit dem Mittelpunkt Z ein mit $A = P_{16}$, $B = P_{15}$, $C := P_4P_{16} \cap BZ$ und $D := P_{15}P_{25} \cap AZ$. Es ist $\alpha = 180^\circ/30 = 6^\circ$. Dann ist zunächst klar, dass $\angle ABC = \angle BAD = 14\alpha = 84^\circ$ gilt. Ferner ist $\angle ABD = (25-16)\alpha = 9\alpha = 54^\circ$ und $\angle CAB = (15-4)\alpha = 11\alpha = 66^\circ$.
Wir sind fertig, wenn wir zeigen können, dass $CD \equiv P_7P_{17}$ gilt. Aus Symmetriegründen ist klar, dass sich P_7P_{17} und P_5P_{25} auf AZ schneiden. Wir zeigen nun analog zu Aufgabe 1, dass sich die drei Diagonalen P_7P_{17}, P_4P_{16} und P_0P_{15} in einem Punkt schneiden. Mit den Bezeichnungen von Aufgabe 1 hat das Dreieck $P_{17}P_{15}P_4$ hat die Winkelgrößen

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 8\alpha, & \alpha_2 &= 3\alpha,\\ \beta_1 &= 13\alpha, & \beta_2 &= 4\alpha,\\ \gamma_1 &= \alpha, & \gamma_2 &= \alpha. \end{aligned}$$

Die Bedingung aus der trigonometrischen Form des Satzes von CEVA lautet damit

$$\sin 8\alpha \cdot \sin 4\alpha = \sin 13\alpha \cdot \sin 3\alpha \quad \text{bzw.} \quad \sin 48^\circ \sin 24^\circ = \sin 78^\circ \cdot \sin 18^\circ.$$

Dies ist aber unter Benutzung der Doppelwinkelformel für den Sinus und $\sin x = \cos(\pi/2 - x)$ äquivalent zu den folgenden Gleichungen

$$\begin{aligned} 2\sin 48^\circ\ \sin 12^\circ \cos 12^\circ &= \cos 12^\circ\ \sin 18^\circ,\\ 2\sin 48^\circ\ \sin 12^\circ &= \sin 18^\circ,\\ -\cos 60^\circ + \cos 36^\circ &= \sin 18^\circ. \end{aligned}$$

In der letzten Umformung benutzten wir wieder $2\sin a \sin b = -\cos(a+b) + \cos(a-b)$. Die letzte Gleichung gilt wegen $\cos 60^\circ = 1/2$, $\cos 36^\circ = (1+\sqrt{5})/4$ und $\sin 18^\circ = (-1+\sqrt{5})/4$. Die drei Ecktransversalen schneiden sich also in einem gemeinsamen Punkt.
Wir erhalten mit dem Außenwinkelsatz im Dreieck P_7CB, dass

$$\angle BCD = \angle P_{17}P_7P_{15} + \angle P_0P_{15}P_7 = 2\alpha + 7\alpha = 9\alpha = 54^\circ.$$

Comments

todo: geometric markup

Attribution Section

Diese Aufgabe ist veröffentlicht in der WURZEL 11/02 als Aufgabe ι 53. Sie ist entstanden aus der Lösung der Aufgabe 2 von Coxeter. Einen ausführlichen Artikel über Mehrfachschnittpunkte in regulären n-Ecken findet man in

`http://www.mathematik.uni-bielefeld.de/~sillke/SEQUENCES/regular-n-gon.ps`

Johannes Waldmann war so freundlich, mir diesen link mitzuteilen.

Hier ist die Originalquelle:

> Poonen, Bjorn; Rubinstein, Michael: The number of intersection points made by the diagonals of a regular polygon, *SIAM J. Discrete Math.* **11** (1998), no. 1, 135–156 (electronic).

schueler (2004-09-14): Contributed to KoSemNet

graebe (2004-09-14): Prepared along the KoSemNet rules