Der Große Fermatsche Satz

Axel Schüler

31.3.2001

Gliederung

1. Einführung
2. Pierre de Fermat
3. Die Geschichte einer Gleichung
4. Cambridge, 23. Juni 1993
5. Ein Problem tut sich auf …
6. Literatur

Einführung

Die Geschichte des großen Fermatschen Satzes (auch „letzter" Fermatscher Satz genannt) berührt alle großen Themen der Zahlentheorie und ist daher untrennbar verwoben mit der Geschichte der Mathematik. Sie gewährt ungewöhnliche Einsichten in die treibenden Kräfte der Mathematik und, vielleicht noch wichtiger, in die Beweggründe und Ziele der Mathematiker selbst. Die Fermatsche Vermutung bildet das Herzstück einer fesselnden Saga, die von Kühnheit, Geflunker, Scharfsinn und tragischem Leid handelt und in der alle Helden der Mathematik auftreten.
Die Faszinatin des Problems liegt auch in seiner Einfachheit. Selbst ein Grundschüler kann die Fragestellung verstehen.

> Die Gleichung
>
> $$x^n + y^n = z^n \tag{1}$$
>
> besitzt für $n \geq 3$ keine Lösungen in natürlichen Zahlen $x, y, z \geq 1$.

Im 17. Jahrhundert ließ Pierre de Fermat dieses Problem ohne Absicht zu einer Herausforderung für alle Nachfolger werden. Ein begnadeter Mathematiker nach dem andern musste vor Fermats Hinterlassenschaft demütig kapitulieren, und drei Jahrzehnte lang gelang es keinem einzigen, das Problem zu lösen. Zwar gibt es in der Mathematik auch andere ungelöste Probleme, doch das Besondere an Fermats Problem ist seine trügerische Schlichtheit. Diese kommt sicherlich auch von seiner Ähnlichkeit mit dem bekannten Satz des Pythagoras. Wohl jeder Zehntklässler findet auf Anhieb eine ganzzahlige Lösung der Gleichung

$$x^2 + y^2 = z^2 \tag{2}$$

mit $x, y, z \geq 1$, etwa $(3, 4, 5)$, $(5, 12, 13)$ oder $(15, 8, 17)$. Ohne große Probleme bestätigt man durch einfaches Nachrechnen, dass man für alle Paare $m > n$ von teilerfremden natürlichen Zahlen unterschiedlicher Parität mit

$$x = 2mn, \quad y = m^2 - n^2, \quad z = m^2 + n^2$$

eine Lösung von (2) hat. Auch nicht viel schwerer ist es zu zeigen, dass dies *alle* teilerfremden Lösungen von (2) sind. Dies wurde mit Schülern der Klassen 9 bis 12 aus Sachsen in der Mathematischen Winterschule 2001 der Leipziger Schülergesellschaft für Mathematik (LSGM) in Colditz durchgeführt.

Pierre de Fermat

Pierre de Fermat wurde am 20. August 1601 in Südfrankreich als Sohn eines wohlhabenden Lederhändlers geboren. Er genoss eine hervorragende Schulbildung in einem Franziskanerkloster. Auf Drängen seiner Eltern schlug er eine juristische Laufbahn ein und wurde ein gewissenhafter und fleißiger Staatsdiener. In Europa ging in dieser Zeit die Pest um. Auch Fermat erkrankte und wurde schon von Kollegen tot geglaubt. Doch Fermat überlebte nicht nur die gesundheitlichen Gefahren, er überstand auch die politischen. Er hatte keinen politischen Ehrgeiz und widmete alle seine freien Kräfte der Mathematik. Manche bezeichnen ihn als „Fürst der Amateure“ andere zählen ihn zu den Professionellen. Eine wichtige integrierende Rolle spielte in dieser Zeit der Mönch und Mathematiker Mersenne. Er war entschlossen, den damals bestehenden Ethos der Verschwiegenheit zu bekämpfen, und er forderte die Mathematiker auf, ihre Gedanken offenzulegen und sich ihre Arbeiten gegenseitig zunutze zu machen. Mersenne war offensichtlich der einzige Mathematikerkollege, mit dem Fermat regelmäßig zusammentraf. Mersenne ermunterte Fermat, seine Beweise zu veröffentlichen, doch dieser weigerte sich beharrlich. Das scheue und zurückgezogene Genie Fermat besaß freilich auch einen schelmischen Zug. Er schrieb Briefe an andere Mathematiker, in denen er seine neuesten Sätze verkündete, ohne deren Beweis mitzuliefern. Dann forderte er seine Zeitgenossen auf, diesen zu suchen.
Mersennes Einfluss auf Fermat wird wohl nur noch von der *Arithmetica* des Diophantos von Alexandria übertroffen. Dies ist ein Lehrbuch der Zahlentheorie, vergleichbar mit den *Elementen* des Euklid. Fermat machte eine Vielzahl von Randnotizen in diesem Werk, unter anderem:

> Es ist nicht möglich einen Kubus in zwei Kuben, ein Biquadrat in zwei Biquadrate und allgemein eine Potenz, höher als die zweite, in zwei Potenzen mit dem selben Exponenten zu zerlegen.

Und etwas weiter findet man:

Ich habe hierfür einen wahrhaft wunderbaren Beweis, doch ist dieser Rand zu schmal, ihn zu fassen.

Fermat starb am 12. Januar 1665. In der Veröffentlichung seines Nachlasses 1670 durch Clément-Samuel findet man 48 solcher Bemerkungen, eine wahre Schatztruhe von Entdeckungen.

Die Geschichte einer Gleichung

1635	Fermat formuliert das Problem als Randnotiz. Er löst den Fall $n = 4$ und führt dabei die „Methode des unendlichen Abstieges“ ein. Sie besagt, dass jede Teilmenge der natürlichen Zahlen ein kleinstes Element besitzt.
4. 8. 1753	Euler zeigt den Fall $n = 3$ mit der Abstiegsmethode unter Benutzung der komplexen Zahlen.
1825	Sophie Germain, Dirichlet und Legendre lösen den Fall $p = 5$.
1839	Lamé erledigt $p = 7$.
1. 3. 1847	Cauchy und Lamé kündigen gleichzeitig und unabhängig voneinander vor der Akademie ihre Beweise an.
24. 5. 1847	Liouville verliest vor der Akademie einen Brief von Ernst Kummer und löst einen Schock aus: Die Beweise von Cauchy und Lamé beruhen auf einem Irrtum. Die eindeutige Primfaktorzerlegung gilt nicht in allen Ringen $\mathbb{Z}[\zeta]$ mit $\zeta^p = 1$, etwa nicht für $p = 37$, 59 und 67.
1875	Der 1853 ausgeschriebene Preis der französischen Akademie geht an Kummer.
27. 6. 1908	Der verstorbene Darmstädter Industrielle Paul Wofskehl setzte ein Preisgeld von 1.000.000 Mark für denjenigen aus, der den Großen Satz von Fermat beweist.
1983	Gerd Faltings zeigt, dass die Gleichung (1) für jede natürliche Zahl n höchstens endlich viele Lösungen besitzt.
1988	Naom Elkies zeigt, dass die Euler-Vermutung falsch ist: Es gibt eine Lösung der Gleichung $x^4 + y^4 + z^4 = w^4$ in natürlichen Zahlen, nämlich $(2682440, 15365639, 18796760, 20615673)$.
1993	Der große Fermatsche Satz gilt für alle Primzahlen $p < 4000000$.
23. 6. 1993	Andrew Wiles trägt den Beweis des Fermats am Newton-Institut in Cambridge vor.
23. 8. 1993	Nick Katz entdeckt eine Lücke im Beweis.
25. 10. 1994	Richard Taylor und Andrew Wiles finden einen neuen Teilbeweis für die Lücke. Der große Fermat ist bewiesen.

Die Frist für die Verleihung des Wolfskehlpreises endet am 13. 9. 2007. Umgerechnet auf heutige Verhältnisse hätte das Preisgeld eine Höhe von 2,5 Millionen DM gehabt. Durch den Wertverlust bei der Inflation sank das Preisgeld allerdings und war bei seiner Übergabe an Andrew Wiles etwa 70000 DM wert. Im ersten Jahr sind 621 „Lösungen“ bei der Göttinger Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften eingegangen. Der Sekretär der Akademie teilt die eingehenden Manuskripte auf in völligen Unsinn, der sofort zurückgeschickt wird und Material, das wie Mathematik aussieht.

Cambridge, 23. Juni 1993

Es war die wichtigste Mathematikvorlesung des Jahrhunderts. Zweihundert Mathematiker lauschten wie gebannt. Nur ein Viertel von ihnen verstand das dichte Gemenge aus griechischen Symbolen und algebraischen Formeln an der Tafel. Die übrigen waren einfach in der Hoffnung gekommen, Zeugen eines historischen Ereignisses zu werden.
Tags zuvor waren Gerüchte aufgekommen. In der elektronischen Post des Internet wurde gemunkelt, die Vorlesung werde mit der Lösung eines weltberühmten mathematischen Problems enden, mit dem Beweis von Fermats letztem Satz.
Die drei Tafeln waren nun vollgeschrieben mit Rechnungen, und der Vortragende hielt inne, um die erste Tafel zu wischen. Dann setzte er seine algebraischen Erörterungen fort. Jede Zeile schien ihn der Lösung einen kleinen Schritt näher zu bringen, doch auch eine Dreiviertelstunde später hatte er den Beweis noch nicht verkündet. Die Professoren, dicht gedrängt in den vordersten Stuhlreihen warteten ungeduldig auf die Lösung. Hinten im Raum standen viele Studenten, die sich fragend nach den älteren Semestern umsahen, um vielleicht einen Fingerzeig auf die Lösung zu erhalten. Waren sie Zeugen eines vollständigen Beweises von Fermats letztem Satz, oder wurde dort vorne bloß ein unvollständiger Gedankengang vorgetragen, dem die Pointe fehlte?

Am 23. Juni begann Andrew Wiles seinen dritten und letzten Vortrag, erinnerte sich John Coates. Erstaunlicherweise waren praktisch alle, die Ideen zu dem Beweis beigesteuert hatten, im Raum versammelt, Mazur, Ribet, Kolywagin und viele, viele andere. Inzwischen hatten sich die Gerüchte so sehr verdichtet, dass die gesamte Mathematikergemeinde von Cambridge zum letzten Vortrag erschien. Wer Glück hatte, konnte sich noch ins Auditorium zwängen, die anderen mussten draußen im Gang bleiben, wo sie auf Zehenspitzen stehend durchs Fenster spähten. Ken Ribet hatte sich vorgenommen, die wichtigsten mathematischen Darlegung des Jahrhunderts nicht zu versäumen:„Ich kam ziemlich früh und setzte mich mit Barry Mazur in die erste Reihe. Um das Ereignis festzuhalten, hatte ich meine Kamera dabei. Die Athmosphäre war sehr geladen, die Leute waren aufgeregt. Natürlich hatten wir das Gefühl, an einem historischen Moment teilzuhaben. Vor und während des Vortrages hatten die Leute verschmitzte Gesichter. Die Spannung hatte sich über mehrere Tage hin aufgebaut. Dann kam dieser herrliche Augenblick, als wir uns dem Beweis von Fermats letztem Satz näherten. Ich habe nie einen so großartigen Vortrag erlebt, mit so vielen glänzenden Ideen, voll dramatischer Spannung, und so gut aufgebaut. Es gab nur eine mögliche Pointe.“ Nach sieben Jahren energischer Arbeit war Wiles nun bereit, der Welt seinen Beweis zu verkünden. An die letzten Augenblicke des Vortrags kann er sich merkwürdigerweise nicht besonders gut erinnern, an die Atmosphäre schon:„Obwohl die Presse schon Wind von dem Vortrag hatte, war sie glücklicherweise nicht dabei. Doch im Publikum saßen eine Menge Leute, die gegen Ende Fotos machten, und der Institutsdirektor war gut vorbereitet mit einer Flacshe Champagner gekommmen. Während ich den Beweis vortrug, herrschte das typische würdevolle Schweigen, und dann schrieb ich einfach Fermats letzten Satz an die Tafel. ‚Ich denke, das genügt‘, meinte ich dann, und es gab langen Beifall“.

Wiles reichte sein Manuskript bei der Zeitschrift *Inventiones Mathematicae* ein, und nun war es an deren Herausgeber Barry Mazur, die Gutachter auszuwählen. Wiles hatte eine derartige Vielfalt von modernen und klassischen Verfahren für die Arbeit herangezogen, dass Mazur die außergewöhnliche Entscheidung traf, nicht nur, wie üblich, zwei oder drei Gutachter zu benennen, sondern sechs. Jährlich erscheinen rund um den Globus 30000 Artikel, doch die schiere Größe und Bedeutung von Wiles’ Manuskript verlangte eine besonders kritische

Prüfung. Um die Sache zu vereinfachen, unterteilte man das zweihundertseitige Manuskript in sechs Abschnitte, für die jeweils einer der Gutachter die Verantwortung übernahm.

Ein Problem tut sich auf ...

Wiles:„Ich konnte diese bestimmte, sehr unscheinbar aussehende Frage nicht sofort klären. Eine Weile lang schien sie mir vom selben Schlag zu sein, wie die anderen Probleme, doch dann, irgendwann im September, wurde mir klar, dass dies eben keine belanglose kleine Schwierigkeit war, sondern ein elementarer Fehler. Im entscheidenden Teil der Argumentation mit der Kolywagin-Flach-Methode steckte ein Irrtum, aber ein derart unterschwelliger, dass ich ihn bis dahin völlig übersehen hatte ...“.
Je tiefer es in den Winter hinein ging, desto mehr schwanden die Hoffnungen auf einen Durchbruch, und eine immer größere Zahl von Mathematikern äußerte die Meinung, es sei Wiles' Pflicht, das Manuskript freizugeben. Die Gerüchte wollten nicht verstummen, und in einer Zeitung hieß es, Wiles habe aufgegeben und der Beweis sei unwiderruflich gescheitert.

Die Befreiung

25. 10. 1994. Die Iwasawa-Theorie alleine war unzulänglich. Die Kolywagin-Flach-Methode für sich genommen ebenfalls. Zusammen ergänzten sie sich aufs beste. Diesen Moment der Inspiration wird Wiles nie vergessen. Die Erinnerung daran war so eindringlich, dass er zu Tränen bewegt war:„Es war so unbeschreiblich schön; so einfach und elegant. Ich konnte nicht begreifen, wie mir das hatte entgehen können, und zwanzig Minuten lang starrte ich nur ungläubig auf die Lösung. Dann ging ich den Tag über im Fachbereich umher und kam immer wieder zum Schreibtisch zurück, um zu sehen, ob sie noch da war. Ich war ganz aus dem Häuschen vor Aufregung. Das war der wichtigste Moment meines Arbeitslebens. Nichts, was ich jemals tun werde, wird so viel bedeuten.“

Die Struktur des Beweises

(1) Wenn Fermats letzter Satz falsch ist, dann existiert Freys elliptische Gleichung.
(2) Freys elliptische Gleichung ist so abwegig, dass sie nicht modular sein kann.
(3) Die Taniyama-Shimura-Vermutung von 1955 besagt, dass jede elliptische Kurve modular ist.
(4) Dann ist aber die Taniyama-Shimura-Vermutung falsch.

Literatur

[1] E. T. Bell, *The last problem. Rev. and updated and with an introduction and notes by Underwood Dudley*, MAA Spectrum, Mathematical Association of America, Washington, 1990.

[2] G. Cornell and J. H. Silverman (eds.), *Modular forms and Fermat's last theorem. Papers from a conference*, New York, Springer-Verlag, 1995.

[3] W. Scharlau and H. Opolka, *Von Fermat bis Minkowski. Eine Vorlesung über Zahlentheorie und ihre Entwicklung*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1980.

[4] S. Singh, *Fermats letzter Satz. Die abenteuerliche Geschichte eines mathematischen Rätsels*, Deutscher Taschenbuch Verlag, München, 2000.

Attribution Section

schueler (2004-09-09): Contributed to KoSemNet
graebe (2004-09-09): Prepared along the KoSemNet rules