

Einheitswurzeln und Polynome

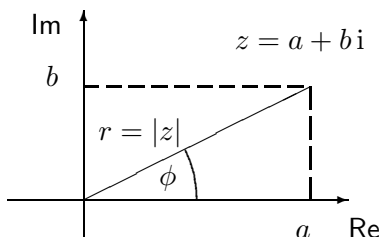
Axel Schüler, Mathematisches Institut, Univ. Leipzig

<mailto:schueler@mathematik.uni-leipzig.de>

Grünheide, 14.3.2000

Konjugation und Betrag

Spiegelt man eine komplexe Zahl $z = a + bi$ an der reellen Achse, so erhält man die *konjugiert komplexe* Zahl $\bar{z} = a - bi$. Der *Betrag* von z ist die Länge der Strecke vom Nullpunkt bis z . Nach dem Satz des Pythagoras ist also $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ oder $|z|^2 = z\bar{z}$. Offenbar ist z reell gdw. $z = \bar{z}$. Den *Realteil* $a = \operatorname{Re}(z)$ bzw. *Imaginärteil* $b = \operatorname{Im}(z)$ der komplexen Zahl $z = a + bi$ erhält man mit Hilfe der komplexen Konjugation wie folgt: $\operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$ bzw. $\operatorname{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$.



Polarkoordinaten. Die komplexe Zahl $z = a + bi$ kann alternativ durch ihren Betrag $r = |z|$ und ihr *Argument* $\varphi = \arg(z)$, den Winkel von der reellen Achse bis zum „Leitstrahl“ durch z , dargestellt werden. Es ist dann $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$. Man kann sich die komplexen Zahlen als Punkte der Gaußschen Zahlenebene vorstellen.

Die Multiplikation komplexer Zahlen ist in der Polarkoordinatenschreibweise sehr einfach. Die Beträge werden multipliziert und die Argumente werden addiert:

$$|z_1 z_2| = |z_1| |z_2| \quad \text{und} \quad \arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2). \quad (1)$$

Für die komplexen Zahlen $z_1 = r_1(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ und $z_2 = r_2(\cos \psi + i \sin \psi)$ gilt also $z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\varphi + \psi) + i \sin(\varphi + \psi))$.

Satz 1 (i) Für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\varphi \in \mathbb{R}$ gilt die *Moivresche Formel*

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi). \quad (2)$$

(ii) Die n komplexen Nullstellen des Polynoms $z^n - 1$ sind die Zahlen

$$\varepsilon_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}, \quad k = 0, \dots, n-1. \quad (3)$$

This material belongs to the Public Domain KoSemNet data base. It can be freely used, distributed and modified, if properly attributed. Details are regulated by the *Creative Commons Attribution License*, see <http://creativecommons.org/licenses/by/2.0>.

For the KoSemNet project see <http://lsgm.uni-leipzig.de/KoSemNet>.

Beweis: Die Moivresche Formel (i) folgt sofort aus der Produktformel.

Insbesondere ist $\arg(z^n) = n \arg(z)$ und $|\cos \varphi + i \sin \varphi| = 1$.

(ii) Es sei c eine Nullstelle von $z^n - 1$, also $c^n = 1$. Folglich gilt $1 = |c^n| = |c|^n$ und somit $|c| = 1$, etwa $c = \cos \varphi + i \sin \varphi$. Nach (i) ist dann $1 = (\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)$. Äquivalent dazu ist $\cos(n\varphi) = 1$ bzw. $n\varphi = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Folglich ist $\varphi = 2k\pi/n$, $k \in \mathbb{Z}$ die allgemeine Lösung für das Argument. Unterscheiden sich aber die Argumente zweier komplexer Zahlen um ein ganzzahliges Vielfaches von 2π (bei gleichem Betrag), so sind die komplexen Zahlen gleich. Für $k = 0, \dots, n-1$ erhält man die n verschiedenen komplexen Lösungen ε_k aus (3). \square

Das Polynom $z^n - 1$ heißt *Kreisteilungspolynom*. Seine n Nullstellen heißen *n -te Einheitswurzeln*. Man beachte, dass $\varepsilon_0 = \varepsilon_n$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_{n+1}$ usw. In der komplexen Ebene bilden die n -ten Einheitswurzeln ein reguläres n -Eck mit dem Mittelpunkt 0 und einer Ecke $\varepsilon_0 = 1$.

Der Vietasche Wurzelsatz

Satz 2 *Es sei $p(z) = z^n - a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} - \dots + (-1)^n a_n$ ein Polynom n -ten Grades mit den Nullstellen z_1, \dots, z_n . Dann lassen sich die Koeffizienten $(-1)^k a_k$ wie folgt durch die Nullstellen ausdrücken:*

$$\begin{aligned} a_1 &= z_1 + \dots + z_n, \\ a_2 &= z_1 z_2 + z_1 z_3 + \dots + z_{n-1} z_n, \\ &\vdots \\ a_n &= z_1 z_2 \dots z_n. \end{aligned}$$

Der Beweis ergibt sich einfach durch Ausmultiplizieren der Identität $p(z) = (z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n)$ und anschließendem Koeffizientenvergleich mit dem gegebenen Polynom.

Erste einfache Anwendungen

Beispiel 1 Für alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\cos \frac{2\pi}{n} + \cos \frac{4\pi}{n} + \dots + \cos \frac{2(n-1)\pi}{n} = 0.$$

Lösung. Wir wenden den Vietaschen Wurzelsatz auf das Polynom $z^n - 1$ und den Koeffizienten vor z^{n-1} an:

$$0 = \varepsilon_0 + \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n} \right).$$

Insbesondere ist der Realteil gleich Null. Spaltet man den Summanden 1 für $k = 0$ ab, so ergibt sich die Behauptung.

Beispiel 2 Beweisen Sie die folgenden Identitäten:

$$(a) \quad \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{8\pi}{7} = -\frac{1}{2}, \quad (b) \quad \sin \frac{2\pi}{7} + \sin \frac{4\pi}{7} + \sin \frac{8\pi}{7} = \frac{1}{2}\sqrt{7}.$$

Lösung. Wir betrachten die 7-ten Einheitswurzeln $\varepsilon_k = \cos \frac{2k\pi}{7} + i \sin \frac{2k\pi}{7}$, $k = 0, \dots, 6$ und setzen

$$e_1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_4, \quad e_2 = \varepsilon_3 + \varepsilon_5 + \varepsilon_6.$$

Die Behauptung ist dann äquivalent zu $e_1 = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{7}$. Wir suchen eine quadratische Gleichung $t^2 + pt + q$ mit den Nullstellen e_1 und e_2 . Nach dem Vietaschen Wurzelsatz ist dann

$$p = -(e_1 + e_2) = -(\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_6) = 1$$

und

$$\begin{aligned} q = e_1 e_2 &= (\varepsilon_1 \varepsilon_3 + \varepsilon_1 \varepsilon_5 + \varepsilon_1 \varepsilon_6) + (\varepsilon_2 \varepsilon_3 + \varepsilon_2 \varepsilon_5 + \varepsilon_2 \varepsilon_6) + (\varepsilon_4 \varepsilon_3 + \varepsilon_4 \varepsilon_5 + \varepsilon_4 \varepsilon_6) \\ &= \varepsilon_4 + \varepsilon_6 + 1 + \varepsilon_5 + 1 + \varepsilon_1 + 1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \\ &= 3 + \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_6 = 2. \end{aligned}$$

Somit sind e_1 und e_2 die Nullstellen von $t^2 + t + 2$ und damit $e_{1,2} = \frac{1}{2}(-1 \pm i\sqrt{7})$. Wegen $\operatorname{Im}(e_1) > 0$ ergibt sich die Behauptung.

Beispiel 3 Dem Einheitskreis sei ein reguläres n -Eck $P_1 P_2 \dots P_n$ einbeschrieben. Man zeige, dass das Produkt aller Streckenquadrate $\overline{P_i P_j}^2$, $1 \leq i < j \leq n$, gleich n^n ist!

Lösung. Wir legen das reguläre n -Eck so in die komplexe Ebene, dass $P_i = \varepsilon_{i-1}$, $i = 1, \dots, n$, wobei die ε_i gerade die n -ten Einheitswurzeln sind. Wegen $\overline{\varepsilon_i} = \varepsilon_{-i}$ gilt dann für $D = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\varepsilon_i - \varepsilon_j)$

$$\begin{aligned} |D|^2 = D\overline{D} &= \prod_{i < j} (\varepsilon_i - \varepsilon_j)(\varepsilon_{-i} - \varepsilon_{-j}) = \prod_{i < j} \varepsilon_i(1 - \varepsilon_{j-i})\varepsilon_{-i}(1 - \varepsilon_{i-j}) \\ &= \prod_{i \neq j} (1 - \varepsilon_{i-j}) = \prod_{k=1}^{n-1} \prod_{i=1}^n (1 - \varepsilon_k) = \left(\prod_{k=1}^{n-1} (1 - \varepsilon_k) \right)^n \end{aligned} \quad (4)$$

Wegen $x^n - 1 = (x - 1)(x^{n-1} + \dots + 1)$ gilt nun aber $f(x) := x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1 = (x - \varepsilon_1)(x - \varepsilon_2) \dots (x - \varepsilon_{n-1})$. Setzt man hier $x = 1$ ein und vergleicht dies mit (4), so erhält man $|D|^2 = f(1)^n = n^n$.

Summen von Binomialkoeffizienten

Beispiel 4 Man zeige, dass für alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$s_n := \binom{n}{0} + \binom{n}{3} + \binom{n}{6} + \dots = \frac{1}{3}(2^n + 2 \cos \frac{n\pi}{3}) \quad (5)$$

Lösung. Es sei $\varepsilon = \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3})$ die erste primitive dritte Einheitswurzel. Wir berechnen nach der binomischen Formel

$$\begin{aligned} (1 + 1)^n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \dots, \\ (1 + \varepsilon)^n &= \sum_{k=0}^n \varepsilon^k \binom{n}{k} = \binom{n}{0} + \varepsilon \binom{n}{1} + \varepsilon^2 \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \dots, \\ (1 + \varepsilon^2)^n &= \sum_{k=0}^n \varepsilon^{2k} \binom{n}{k} = \binom{n}{0} + \varepsilon^2 \binom{n}{1} + \varepsilon^4 \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \dots. \end{aligned}$$

Wegen $1 + \varepsilon^k + \varepsilon^{2k} = 0$ für $k \not\equiv 0 \pmod{3}$ ist die Summe der drei rechten Seiten gleich $3s_n$. Beachtet man, dass $\eta := 1 + \varepsilon$ und $\eta^{-1} = 1 + \varepsilon^2$ primitive sechste Einheitswurzeln sind, was man sich am besten mit einer Skizze verdeutlicht, so lassen sich die linken Seiten, nach Moivre, wie folgt vereinfachen:

$$\begin{aligned}(1 + \varepsilon)^n &= \cos \frac{2\pi n}{6} + i \sin \frac{2\pi n}{6}, \\ (1 + \varepsilon^2)^n &= \cos \frac{2\pi n}{6} - i \sin \frac{2\pi n}{6}.\end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich die Behauptung.

Aufgabe 1 Man zeige, dass für alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\binom{n}{1} + \binom{n}{5} + \binom{n}{9} + \binom{n}{13} + \dots = 2^{n-1} + 2^{n/2-1} \sin \frac{n\pi}{4}.$$

Lösungsidee. Analog zur vorigen Aufgabe setzten wir nun mit den vierten Einheitswurzeln ε_k , $k = 0, \dots, 3$, $(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) = (1, i, -1, -i)$, die Binomialausdrücke $(1 + \varepsilon_k)^n$ an. Anstelle der Summe dieser 4 Ausdrücke, welche uns $\sum_{k \geq 0} \binom{n}{4k}$ liefern würden, multiplizieren wir die erste Gleichung mit 1, die zweite Gleichung mit $-i$, die dritte Gleichung mit -1 und schließlich die vierte Gleichung mit i und bilden jetzt die Summe. Dabei bleiben einzig die zweiten, fünften, neunten usw. Summanden der Binomialkoeffizientensummen übrig; alle anderen heben sich weg wegen $1 + i - 1 - i = 0$. Beachtet man ferner, dass $1 + i = \sqrt{2}\varepsilon_8$ und $1 - i = \sqrt{2}\varepsilon_8^{-1}$ gilt, mit der primitiven achten Einheitswurzel $\varepsilon_8 = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}$, dann ergibt sich die Behauptung.

Aufgabe 2 Man beweise für alle $n \in \mathbb{N}$ die folgenden Identitäten:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{4} + \binom{n}{8} + \dots = 2^{n-2} + 2^{\frac{n}{2}-1} \cos \frac{n\pi}{4} \quad (\text{a})$$

$$\binom{n}{2} + \binom{n}{6} + \binom{n}{10} + \dots = 2^{n-2} - 2^{\frac{n}{2}-1} \cos \frac{n\pi}{4} \quad (\text{b})$$

$$\binom{n}{3} + \binom{n}{7} + \binom{n}{11} + \dots = 2^{n-2} - 2^{\frac{n}{2}-1} \sin \frac{n\pi}{4} \quad (\text{c})$$

Das Kreisteilungspolynom in reellen Faktoren

Zur Berechnung von Summen oder Produkten trigonometrischer Ausdrücke ist es oftmals von Vorteil, das Kreisteilungspolynom $z^n - 1$ in seine *reellen* Faktoren zu zerlegen. Fasst man nämlich immer die Linearfaktoren $(z - \varepsilon_k)$ und $(z - \varepsilon_{n-k})$, $\varepsilon_k \neq 1, -1$ zu einem quadratischen Polynom zusammen, so wird dieses Polynom wegen $\varepsilon_k + \varepsilon_k^{-1} = 2 \cos \frac{2k\pi}{n}$ reell:

$$(z - \varepsilon_k)(z - \varepsilon_k^{-1}) = z^2 - 2z \cos \frac{2k\pi}{n} + 1.$$

Für $n = 2m$ bzw. $n = 2m + 1$ erhalten wir somit

$$z^{2m} - 1 = (z^2 - 1) \prod_{k=1}^{m-1} \left(z^2 - 2 \cos \frac{2k\pi}{2m} z + 1 \right), \quad (6)$$

$$z^{2m+1} - 1 = (z - 1) \prod_{k=1}^m \left(z^2 - 2 \cos \frac{2k\pi}{2m+1} z + 1 \right). \quad (7)$$

Beispiel 5 Man beweise für alle $m \in \mathbb{N}$ die folgenden beiden Identitäten:

$$\sin \frac{\pi}{2m} \sin \frac{2\pi}{2m} \cdots \sin \frac{(m-1)\pi}{2m} = \frac{\sqrt{m}}{2^{m-1}}, \quad (\text{a})$$

$$\sin \frac{\pi}{2m+1} \sin \frac{2\pi}{2m+1} \cdots \sin \frac{m\pi}{2m+1} = \frac{\sqrt{2m+1}}{2^m}. \quad (\text{b})$$

Lösung. (a) Wir dividieren (6) durch $z^2 - 1$ und erhalten

$$z^{2m-2} + z^{2m-4} + \cdots + 1 = \prod_{k=1}^{m-1} (z^2 - 2 \cos \frac{2k\pi}{2m} z + 1). \quad (8)$$

Setzt man $z = 1$ oben ein und beachtet, dass $1 - \cos(2\alpha) = 2 \sin^2 \alpha$, so hat man

$$m = \prod_{k=1}^{m-1} (2(1 - \cos \frac{2k\pi}{2m})) = 2^{m-1} \prod_{k=1}^{m-1} (2 \sin^2 \frac{k\pi}{2m}) = 2^{2m-2} \left(\prod_{k=1}^{m-1} \sin \frac{k\pi}{2m} \right)^2$$

Da $\sin k\pi/(2m) > 0$ für alle $k = 1, \dots, m-1$, folgt hieraus die Behauptung.

(b) Man dividiert (7) durch $z - 1$ und erhält

$$z^{2m} + z^{2m-1} + \cdots + 1 = \prod_{k=1}^m (z^2 - 2 \cos \frac{2k\pi}{2m+1} z + 1). \quad (9)$$

Setzt man hier $z = 1$ ein, so erhält man wie in (a) die Behauptung.

Beispiel 6 Man zeige für alle $m \in \mathbb{N}$:

$$\prod_{k=1}^{2m} \cos \frac{k\pi}{2m+1} = \frac{(-1)^m}{4^m}.$$

Lösung. Wir setzen in (9) $z = -1$ ein und erhalten, da links eine ungerade Anzahl von Summanden steht,

$$1 = 2^m \prod_{k=1}^m (1 + \cos \frac{2k\pi}{2m+1}).$$

Beachtet man diesmal $1 + \cos(2\alpha) = 2 \cos^2 \alpha$, so ergibt sich

$$4^{-m} = \prod_{k=1}^m \cos^2 \frac{k\pi}{2m+1}.$$

Wegen $\cos \alpha = -\cos(\pi - \alpha)$ ist $\cos \frac{(2m+1-k)\pi}{2m+1} = -\cos \frac{k\pi}{2m+1}$. Wir zerlegen somit $\cos^2 \alpha = -\cos \alpha \cos(\pi - \alpha)$ und erhalten

$$4^{-m} = (-1)^m \prod_{k=1}^m \cos \frac{k\pi}{2m+1} \cos \frac{(2m+1-k)\pi}{2m+1}$$

$$4^{-m} = (-1)^m \prod_{k=1}^{2m} \cos \frac{k\pi}{2m+1}.$$

Hieraus folgt die Behauptung.

Trigonometrische Summen

Wir betrachten die Moivresche Formel (2) und wollen nun den Realteil und den Imaginärteil einzeln behandeln. Es gilt

$$\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi) = (\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos^{n-k}(\varphi) i^k \sin^k(\varphi).$$

Wegen $(i^k) = (1, i, -1, -i, 1, \dots)$ erhält man daraus

$$\cos(n\varphi) = \cos^n \varphi - \binom{n}{2} \cos^{n-2} \varphi \sin^2 \varphi + \binom{n}{4} \cos^{n-4} \varphi \sin^4 \varphi - \dots, \quad (10)$$

$$\sin(n\varphi) = \binom{n}{1} \cos^{n-1} \varphi \sin \varphi - \binom{n}{3} \cos^{n-3} \varphi \sin^3 \varphi + \dots. \quad (11)$$

Beispiel 7 Man beweise, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{k=1}^n \cot \frac{(2k-1)\pi}{2n} = 0.$$

Lösung. Da die ungeradzahigen Vielfachen von $\pi/2$ die Nullstellen der \cos -Funktion sind, hat man $\cos(n\varphi_k) = 0$ für $\varphi_k = (2k-1)\pi/(2n)$, $k = 1, \dots, n$. Dividiert man also (10) durch $\sin^n \varphi$ und setzt $\varphi = \varphi_k$ ein, so erhält man mit der Setzung $y = \cot \varphi$, dass die Gleichung

$$0 = y^n - \binom{n}{2} y^{n-2} + \binom{n}{4} y^{n-4} - \dots \quad (12)$$

genau die Nullstellen $\cot \varphi_k$, $k = 1, \dots, n$ hat. Nach dem Vietaschen Wurzelsatz ist die Summe der Nullstellen gleich dem Koeffizienten vor y^{n-1} , also gleich Null.

Beispiel 8 Man beweise, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{n-1} \cot \frac{k\pi}{n} = 0. \quad (a)$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} \cot^2 \frac{k\pi}{n} = \frac{1}{3}(n-1)(n-2). \quad (b)$$

Lösung. Die Winkel $\varphi_k := k\pi/n$, $k = 1, \dots, n-1$ sind gerade Nullstellen von $\sin(n\varphi)$. Wir dividieren daher die Gleichung (11) durch $\sin^n \varphi$ und erhalten mit $z := \cot \varphi$, dass $z_k = \cot \varphi_k$ gerade die $n-1$ Nullstellen der Gleichung

$$0 = \binom{n}{1} z^{n-1} - \binom{n}{3} z^{n-3} + \dots$$

sind. Nach dem Vietaschen Wurzelsatz ergibt sich wieder die Behauptung (a). Normiert man das obige Polynom, mittels Division durch n , so ließt man die zweite elementarsymmetrische Funktion ab:

$$\sigma_2 = -\frac{\binom{n}{3}}{n} = -\frac{1}{6}(n-1)(n-2).$$

Nun läßt sich aber die Quadratsumme $\sum_k z_k^2$ bekanntlich durch die ersten beiden elementarsymmetrischen Funktionen $\sigma_1 = z_1 + \dots + z_n$ und $\sigma_2 = z_1 z_2 + z_1 z_3 + \dots + z_{n-1} z_n$ ausdrücken: $\sum_k z_k^2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2$. Somit erhalten wir $\sum_k z_k^2 = 0 + 2/6(n-1)(n-2)$ und (b) ist gezeigt.

Die Aufgaben A7 und A8 (a) folgen natürlich auch aus der elementaren Tatsache, dass $\cot(\pi - \alpha) = -\cot \alpha$ gilt, denn in A7 ergänzen sich die k und $n - k + 1$ entsprechenden Winkel $(2k - 1)\pi/(2n)$ bzw. $(2n - 2k + 1)\pi/(2n)$ zu π und in der Aufgabe A8 (a) sind es die k und $n - k$ entsprechenden Winkel $k\pi/n$ bzw. $(n - k)\pi/n$.

Beispiel 9 Man beweise, dass für alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \cot \frac{(4k-3)\pi}{4n} = n. \quad (13)$$

Man beweise:

$$\cot 1^\circ + \cot 5^\circ + \dots + \cot 177^\circ = 45. \quad (14)$$

Lösung. Wir dividieren die Gleichung (10) durch die Gleichung (11) und erhalten nach anschließendem Kürzen durch $\sin^n \varphi$ die Gleichung

$$\cot(n\varphi) = \frac{\cot^n \varphi - \binom{n}{2} \cot^{n-2} \varphi + \dots}{\binom{n}{1} \cot^{n-1} \varphi - \binom{n}{3} \cot^{n-3} \varphi + \dots}. \quad (15)$$

Setzt man hier nacheinander $\varphi_k = (\alpha + k\pi)/n$, $k = 0, \dots, n-1$ ein, wobei $\alpha \in \mathbb{R}$ eine feste von $\pi/2 + m\pi$, $m \in \mathbb{Z}$ verschiedene Zahl ist, so bleibt die linke Seite konstant gleich $\cot \alpha$. Beseitigt man den Nenner und setzt $y := \cot \varphi$, so erkennt man, dass die Gleichung

$$\cot \alpha \left(\binom{n}{1} y^{n-1} - \binom{n}{3} y^{n-3} + \dots \right) = y^n - \binom{n}{2} y^{n-2} + \binom{n}{4} y^{n-4} - \dots \quad (16)$$

genau die n Lösungen $\cot \varphi_k$, $k = 0, \dots, n-1$ besitzt. Wir wenden wieder den Vietaschen Wurzelsatz auf den Koeffizienten vor y^{n-1} an und erhalten

$$\sum_{k=0}^{n-1} \cot \frac{\alpha + k\pi}{n} = n \cot \alpha. \quad (17)$$

Erweitert man den Bruch mit 4 und setzt $4\alpha = -3\pi$, also $\alpha = -3/4\pi$ bzw. $\cot \alpha = 1$, so ergibt sich (13). Setzt man in (17) $n = 45$ und $\alpha = 45^\circ$ ein, so erhält man $\varphi_k = 1^\circ + k4^\circ$, $k = 0, \dots, 44$ und (14) folgt.

Beispiel 10 Man beweise dass für alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$ die folgende Identität gilt:

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sin^2 \frac{(2k-1)\pi}{2n}} = n^2. \quad (18)$$

Lösung. Wir betrachten die Gleichung (12) mit den Nullstellen $\cot(2k-1)\pi/(2n)$, $k = 1, \dots, n$. Wegen $\sin^{-2} \alpha = 1 + \cot^2 \alpha$ ist die gesuchte Summe der reziproken Sinusquadrate gleich

$$\sum_{k=1}^n (1 + y_k^2) = n + (y_1^2 + \dots + y_n^2). \quad (19)$$

Zur Berechnung der Quadratsumme benutzen wir wieder die Relation $\sum_k y_k^2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2$. Nach (12) und dem Vietaschen Wurzelsatz, angewandt auf die Koeffizienten vor y^{n-1} und y^{n-2} , ist aber $\sigma_1 = 0$ und $\sigma_2 = -\frac{1}{2}n(n-1)$. Setzt man dies in (19) ein, so ergibt sich

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sin^2 \frac{(2k-1)\pi}{2n}} = n + 2\frac{1}{2}n(n-1) = n^2.$$

Attribution Section

schueler (2004-09-09): Contributed to KoSemNet

graebe (2004-09-09): Prepared along the KoSemNet rules