Polynome

Axel Schüler, Mathematisches Institut, Univ. Leipzig

mailto:schueler@mathematik.uni-leipzig.de

März 2000

Polynome, auch *ganzrationale Funktionen* genannt, sind die einfachsten Funktionen überhaupt. Sie treten sowohl in der Analysis, eben als Funktionen, als auch als auch in der Algebra, als Elemente von „abstrakten Ringen“, auf. In Olympiadeaufgaben tauchen sie entweder direkt bei der Restberechnung in der Polynomdivision, bei der Nullstellenbestimmung oder als symmetrisches Gleichungssystem auf. Man benutzt Polynome in Verbindung mit dem VIETAschen Wurzelsatz auch zur Berechnung von Summen von Binomialkoeffizienten oder von trigonometrischen Summen.

Division mit Rest, Nullstellen und der Identitätssatz

Definition 1 Eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Gestalt

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad a_n \neq 0$$

heißt *Polynom vom Grad n* (Schreibweise: $\deg(f) = n$). Die festen Zahlen $a_0, \dots, a_n$ heißen *Koeffizienten* von f und können komplex, reell, rational oder ganzzahlig sein.

Beispiel 1 Das (lineare) Polynom $f(x) = mx + n$, $m \neq 0$, hat den Grad 1. Für $f(x) = (x+1)^n - x^n - 1$, $n \geq 2$, gilt $\deg(f) = n - 1$. Vereinbarungsgemäß hat das Nullpolynom $f \equiv 0$ den Grad -1. Die Polynome vom Grad 0 sind genau die konstanten Polynome $f(x) = c$, $c \neq 0$.

Der folgende einfache Satz gehört zu den wichtigsten Aussagen über Polynome. Aus ihm lassen sich viele interessante Sätze ableiten.

Satz 1 (Division mit Rest) *Es seien $f(x)$ und $g(x)$ Polynome. Dann existieren Polynome $q(x)$ und $r(x)$ mit*

$$f(x) = g(x)q(x) + r(x), \quad \deg(r) < \deg(g). \tag{1}$$

Die Polynome $q(x)$ und $r(x)$ heißen Quotient *bzw.* Rest *bei der Division von $f(x)$ durch $g(x)$. Ist $r(x) \equiv 0$, dann sagen wir $g(x)$* teilt *$f(x)$ und schreiben $g(x) \mid f(x)$.*

Beispiel 2 Die aus der Schule bekannte Methode der Division mit Rest für ganze Zahlen lässt sich auf Polynome übertragen. Man erhält etwa mit $f(x) = x^7 - 1$ und $g(x) = x^3 + x + 1$

$$x^7 - 1 = (x^3 + x + 1)(x^4 - x^2 - x + 1) + 2x^2 - 2.$$

Wenn $\deg(f) \geq \deg(g)$ gilt, dann ist offensichtlich $\deg(f) = \deg(g) + \deg(q)$.

Aufgabe 1 Gesucht sind alle reellen Zahlen a und b mit $x^2 - 2ax + 2 \,|\, x^4 + 3x^2 + ax + b$.

Aufgabe 2 Es seien a, b, r und s reelle Zahlen mit $a \neq b$. Welchen Rest lässt das Polynom $f(x)$ bei der Division durch $(x-a)(x-b)$, wenn bekannt ist, dass $f(a) = r$ und $f(b) = s$ gilt?

Lösung. Da durch ein quadratisches Polynom dividiert wird, ist der Rest höchstens linear, etwa $r(x) = Ax + B$. Wir wollen A und B ermitteln. Nach (1) gilt also

$$f(x) = (x-a)(x-b)q(x) + Ax + B$$

mit einem gewissen Polynom $q(x)$ als Quotient. Setzt man in diese Gleichung nacheinander $x = a$ und $x = b$ ein, so erhält man das lineare Gleichungssystem in den Variablen A und B:

$$r = Aa + B, \qquad s = Ab + B.$$

Es besitzt die eindeutig bestimmte Lösung

$$A = \frac{s-r}{b-a}, \qquad B = \frac{rb - sa}{b-a}.$$

Nun ein konkretes Beispiel:

Aufgabe 3 Welchen Rest lässt $x^{100} - 2x^{51} + 1$ bei der Division durch $x^2 - 1$?

Lösung. Wegen $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$ hat man $a = 1$ und $b = -1$. Somit ist $r = f(1) = 1 - 2 + 1 = 0$ und $s = f(-1) = 1 + 2 + 1 = 4$. Damit ergibt sich nach den obigen Formeln $A = -2$ und $B = 2$. Der Rest bei der Division durch $x^2 - 1$ ist also gleich $-2x + 2$.

Die Zahl α heißt *Nullstelle* des Polynoms f, wenn $f(\alpha) = 0$ gilt.
Es sei f ein Polynom vom Grad n und $a \in \mathbb{R}$. Die Division mit Rest von f durch $x - a$ führt auf

$$f(x) = (x-a)q(x) + r(x), \tag{2}$$

wobei $r(x)$ ein konstantes Polynom ist, da $\deg(r) < \deg(x-a) = 1$, also $\deg(r) \leq 0$. Setzt man $x = a$ in (2) ein, so erhält man $f(a) = r(a)$ also $r(x) \equiv f(a)$ und somit

$$f(x) = (x-a)q(x) + f(a). \tag{3}$$

Aufgabe 4 Es sei $f(x)$ ein Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten und $f(0)$ und $f(1)$ seien beide ungerade. Dann hat $f(x)$ keine ganzzahlige Nullstelle.

Nach (3) gilt

$$f(x) = xq(x) + f(0) \quad \text{und} \quad f(x) = (x-1)p(x) + f(1).$$

Dabei sind $q(x)$ und $p(x)$ wieder Polynome mit ganzzahligen Koeffizienten, da die Divisoren x bzw. $x-1$ Polynome mit höchstem Koeffizienten gleich Eins sind. Ist nun $f(a) = 0$ für ein $a \in \mathbb{Z}$, so liefern die obigen Gleichungen modulo 2:

$$0 \equiv aq(a) + 1 \quad \text{und} \quad 0 \equiv (a-1)p(a) + 1.$$

Da jedoch entweder a oder $a-1$ gerade ist, ergibt sich hier ein Widerspruch. Das Polynom $f(x)$ hat also keine ganzzahligen Nullstellen.

Folgerung 1 *Es sei $f(x)$ ein Polynom, das nicht identisch Null ist. Die Zahl a ist genau dann Nullstelle von $f(x)$, wenn $f(x)$ ohne Rest durch $x-a$ teilbar ist, d. h., wenn es ein Polynom $q(x)$ gibt mit*

$$f(x) = (x-a)q(x). \tag{4}$$

Dabei gilt $\deg(q) = \deg(f) - 1$.

Aufgabe 5 (a) Für welche natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$ ist $x^2 + x + 1$ ein Teiler von $f_n(x) := x^{2n} + x^n + 1$?
(b) Für $n \in \mathbb{N}$ mit $3 \not| \, (n+1)$ gilt $37 \,|\, 1\underbrace{0\dots0}_{n}1\underbrace{0\dots0}_{n}1$.

Lösung. (a) Es gilt die folgende Zerlegung in Linearfaktoren $x^2 + x + 1 = (x-\omega)(x-\omega^2)$, wobei $\omega = \frac{1}{2}(-1+\mathrm{i}\sqrt{3})$ ($\mathrm{i}^2 = -1$ ist die imaginäre Einheit). Nach Folgerung 1 ist $f_n(x)$ genau dann durch $x-\omega$ und $x-\omega^2$ teilbar, wenn $f_n(\omega) = 0$ und $f_n(\omega^2) = 0$. Es sei $n = 3k \pm 1$. Dann gilt wegen $\omega^3 = 1$ zunächst $f_n(\omega) = \omega^{6k\pm2} + \omega^{3k\pm1} + 1 = \omega^{\pm2} + \omega^{\pm1} + 1 = 0$ und analog $f_n(\omega^2) = 0$. Jedoch für $n = 3k$ ist $f_n(\omega) = f_n(\omega^2) = 3$. Somit teilt $x^2 + x + 1$ genau dann $f_n(x)$, wenn n nicht durch 3 teilbar ist.
(b) Es gilt $1\underbrace{0\dots0}_{n}1\underbrace{0\dots0}_{n}1 = 10^{2n+2} + 10^{n+1} + 1$. Setzt man in (a) $x = 10$ ein und beachtet $10^2 + 10 + 1 = 3 \cdot 37$, so ergibt sich die Behauptung.

Man sagt f *hat bei $x = a$ eine m-fache Nullstelle*, falls es ein Polynom $q(x)$ mit

$$f(x) = (x-a)^m q(x), \quad \text{und} \quad q(a) \neq 0$$

gibt.

Beispiel 3 Das Polynom $f(x) = x^2(x-1)^2$ hat eine doppelte Nullstelle bei $x = 0$ und eine weitere doppelte Nullstelle bei $x = 1$.

Bemerkung (zum Beispiel 2): Treten im Divisor mehrfache Nullstellen auf, so kommt man mit dem obigen Ansatz nicht weiter. Ist etwa a eine m-fache Nullstelle von $g(x)$, so muss man die Werte $f(a), f'(a), \dots, f^{(m-1)}(a)$ kennen, um den Rest von $f(x)$ bei der Division durch $g(x)$ zu ermitteln. Dabei bezeichnet $f^{(k)}(a)$ die *k-te Ableitung* von $f(x)$ an der Stelle a. Die erste

Ableitung von $f(x) = a_n x^n + \cdots a_1 x + a_0$ ist definiert als $f'(x) = na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + a_1$. Der neue Ansatz ergibt sich aus der *Taylorentwicklung* von $f(x)$ in a:

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(m-1)}(a)}{(m-1)!}(x-a)^{m-1} + q(x)(x-a)^m.$$

Wir bestimmen etwa den Rest von $f(x) = x^{100} - 2x^{51} + 1$ bei der Division durch $g(x) = (x-1)^2$. Der Ansatz lautet nun mit $a = 1$ als doppelter Nullstelle von $g(x)$:

$$f(x) = f(1) + (x-1)f'(1) + (x-1)^2 q(x).$$

Die ersten beiden Summanden auf der rechten Seite liefern den Rest bei der Division durch $(x-1)^2$. Wir bestimmen den Rest von $f(x)$ bei der Division durch $(x-a)^2(x-b)$. Der Ansatz liefert ein quadratisches Polynom $Ax^2 + Bx + C$ als Rest:

$$f(x) = (x-a)^2(x-b)q(x) + Ax^2 + Bx + C.$$

Setzt man hier $x = a$ und $x = b$ ein, so erhält man 2 lineare Gleichungen für die 3 Variablen A, B und C. Die fehlende dritte Gleichung verschafft man sich durch Differentiation der obigen Gleichung und erneutes Einsetzen von $x = a$:

$$f'(a) = 2Aa + Ba.$$

Kennt man also $f(a)$, $f'(a)$ und $f(b)$, so kann man den gesuchten Rest ermitteln.

Folgerung 2 *Es sei $f(x)$ ein Polynom vom Grad n, $n \in \mathbb{N}$. Dann besitzt $f(x)$ höchstens n Nullstellen gezählt in ihrer Vielfachheit.*

Beweis: Wir benutzen vollständige Induktion über den Grad des Polynoms. Für Polynome vom Grad Null ist die Aussage sicher richtig, denn die konstanten, von Null verschiedenen Polynome haben keine Nullstellen. Nun gelte der Satz bereits für alle Polynome vom Grad $n-1$. Es sei $x = a$ eine Nullstelle von $f(x)$. Dann gibt es nach Folgerung 1 ein Polynom $q(x)$ mit (4). Ferner gilt $\deg(q) = n-1$. Also hat nach Induktionsvoraussetzung $q(x)$ höchstens $n-1$ Nullstellen, gezählt in ihrer Vielfachheit. Nun sind aber alle Nullstellen von $f(x)$ entweder Nullstellen von $q(x)$ oder vom $x - a$ oder von beiden. War $x = a$ bereits Nullstelle von $q(x)$, so erhöht sich deren Vielfachheit (beim Übergang zu $f(x)$) um genau Eins. War $x = a$ keine Nullstelle von $q(x)$, so hat $f(x)$ genau eine Nullstelle mehr als $q(x)$, also höchstens n Nullstellen. □

Aus Folgerung 1 ergibt sich durch schrittweises Abspalten von Linearfaktoren die

Folgerung 3 *Es sei $f(x)$ ein Polynom n^{ten} Grades mit den Nullstellen $a_1, \ldots, a_n$, gezählt in ihrer Vielfachheit. Dann existiert eine Konstante c, $c \neq 0$, so dass*

$$f(x) = c(x-a_1)\cdots(x-a_n).$$

Folgerung 4 (Identitätssatz) (i) *Es sei $f(x)$ ein Polynom mit $\deg(f) \leq n$. Besitzt $f(x)$ mehr als n paarweise verschiedene Nullstellen, so gilt $f(x) \equiv 0$.*

(ii) *Stimmen zwei Polynome $f(x)$ und $g(x)$, beide vom Grade kleiner oder gleich n, an $n+1$ verschiedenen Stellen überein, so stimmen sie an allen Stellen überein, d. h., sie sind identisch $f(x) \equiv g(x)$.*

Beweis: (i) Das Polynom kann nicht den Grad k, $k \in \{0, \dots, n\}$ besitzen, da es sonst nach Folgerung 2 höchstens k verschiedene Nullstellen besäße. Da $\deg(f) \leq n$ bleibt nur noch $f(x) \equiv 0$.
(ii) Wir setzen $h(x) := f(x) - g(x)$. Dann ist $\deg(h) \leq n$, jedoch hat $h(x)$ mindestens $n+1$ verschiedene Nullstellen. Nach (i) ist dann $h(x) \equiv 0$, also $f(x) \equiv g(x)$. $\square$

Beispiel 4 Es seien a, b und c paarweise verschiedene reelle Zahlen. Die quadratische Gleichung

$$\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} + \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)} = 1 \tag{5}$$

hat offensichtlich die Lösungen $x_1 = a$, $x_2 = b$ und $x_3 = c$. Was folgt daraus?
Antwort: Auf der linken und rechten Seite von (5) stehen Polynome höchstens zweiten Grades, die aber in 3 verschiedenen Stellen übereinstimmen. Nach Folgerung 4 (ii) stimmen sie dann für alle x überein.

Den Rahmen dieses Beitrages sprengen würde der Beweis des *Fundamentalsatzes der Algebra*, der streng genommen gar kein algebraischer Satz ist, sondern in die Analysis gehört.

Satz 2 (Fundamentalsatz der Algebra) *Jedes Polynom n^{ten} Grades, $n \geq 1$, mit komplexen Koeffizienten besitzt mindestens eine komplexe Nullstelle.*

Zusammen mit der Folgerung 2 ergibt sich damit

Satz 3 *Jedes Polynom n^{ten} Grades, $n \geq 1$, mit komplexen Koeffizienten besitzt genau n komplexe Nullstellen.*

Der Vietasche Wurzelsatz

Hat das Polynom

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x + a_n \tag{6}$$

die Nullstellen $x_1, \dots, x_n$, gezählt in ihrer Vielfachheit, dann liefert Folgerung 3

$$f(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n).$$

Multipliziert man dies aus und fasst die 2^n Summanden nach Potenzen von x^k, $k = 0, \dots, n$, zusammen, so liefert der Koeffizientenvergleich mit (6)

$$\begin{aligned} a_1 &= -(x_1 + x_2 + \dots + x_n), \\ a_2 &= x_1 x_2 + x_1 x_3 + \dots + x_{n-1} x_n, \\ &\vdots \\ a_n &= (-1)^n x_1 x_2 \cdots x_n. \end{aligned}$$

Die auf der rechten Seite auftretenden Polynome σ_k, $k = 1, \dots, n$, in den Veränderlichen $x_1, \dots, x_n$

$$\sigma_k(x_1, \dots, x_n) := \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} x_{i_1} \cdots x_{i_k}$$

heißen *elementarsymmetrische Funktionen* der $x_1, \dots, x_n$. Wir haben also gesehen

Satz 4 (Vietascher Wurzelsatz) *Sind $x_1, \dots, x_n$ die Nullstellen des Polynoms $f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$, so gilt für $k = 1, \dots, n$*

$$a_k = (-1)^k \sigma_k(x_1, \dots, x_n).$$

Dabei sind die σ_k die elementarsymmetrischen Funktionen.

Definition 2 Eine Funktion $f(x_1, \dots, x_n)$ heißt *symmetrisch*, falls sie unter allen Vertauschungen der Variablen $x_1, \dots, x_n$ invariant, d. h. unverändert, bleibt. Mit anderen Worten, es gilt für alle $k \in \{1, \dots, n-1\}$

$$f(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, x_k, x_{k+2}, \dots, x_n).$$

Beispiel 5 Symmetrisch sind etwa die Funktionen $f(x, y) = \cos(x-y)$, $f(x, y, z) = 1+xyz+x^2+y^2+z^2$, $g(x, y, z) = (x-y)^2(x-z)^2(y-z)^2$. Nicht symmetrisch dagegen sind $f(x, y) = \sin(x-y)$, $g(x, y, z) = xy+xz$ und $h(x, y, z) = (x-y)(x-z)(y-z)$, weil $\sin(y-x) = -\sin(x-y)$, zwar $g(x, y, z) = g(x, z, y)$ aber $g(x, y, z) \neq g(y, x, z)$ und weil $h(x, y, z) = -h(y, x, z)$.

Eine weitere wichtige Klasse von symmetrischen Funktionen sind die *Potenzsummen*

$$p_k(x_1, \dots, x_n) = x_1^k + \cdots + x_n^k, \; k \in \mathbb{N}.$$

Der Hauptsatz über die symmetrischen Funktionen besagt, dass sich jedes symmetrische Polynom ausdrücken lässt durch die elementarsymmetrischen Funktionen. Insbesondere lassen sich die Potenzsummen durch die elementarsymmetrischen Funktionen ausdrücken:

Satz 5 (Newtonsche Relationen) *Zwischen den elementarsymmetrischen Funktionen $\sigma_k(x_1, \dots, x_n)$ und den Potenzsummen $p_k(x_1, \dots, x_n)$ gelten die folgenden Relationen*

$$0 = p_k - \sigma_1 p_{k-1} + - \cdots + (-1)^{k-1}\sigma_{k-1}p_1 + (-1)^k k\sigma_k \quad \textit{für} \quad k \leq n, \tag{7}$$
$$0 = p_k - \sigma_1 p_{k-1} + - \cdots + (-1)^n \sigma_n p_{k-n} \quad \textit{für} \quad k > n. \tag{8}$$

Beweis: Wir zeigen (8). Dazu sei $f(x) = (x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)$. Nach dem Vietaschen Wurzelsatz gilt dann

$$f(x) = x^n - \sigma_1 x^{n-1} + - \cdots + (-1)^n \sigma_n.$$

Setzt man in die obige Gleichung $x = x_i$ ein und multipliziert mit x_i^{k-n}, so erhält man, da x_i eine Nullstelle von $f(x)$ ist,

$$0 = x_i^k - \sigma_1 x_i^{k-1} + \cdots + (-1)^n \sigma_n x_i^{k-n}.$$

Summiert man schließlich über $i = 1, \dots, n$, so erhält man die Behauptung.
Der Beweis von (7) ist etwa schwieriger. Wir zeigen daher nur den Spezialfall $k = 2$. Offenbar ist $\sigma_1 = p_1$ und daher $\sigma_1 p_1 = (x_1+\cdots+x_n)^2 = x_1^2+x_2^2+\cdots x_n^2+2(x_1x_2+x_1x_3+\cdots x_{n-1}x_n) = p_2 + 2\sigma_2$. Dies ist die Behauptung. $\square$

Aufgabe 6 Es seien $x_1\, x_2$ und x_3 die Nullstellen von $x^3 + 3x^2 - 7x + 1$. Man berechne $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$.

Lösung. Nach dem Vietaschen Wurzelsatz ist $\sigma_1 = -3$ und $\sigma_2 = -7$. Nach dem letzten Teil des obigen Beweises gilt $p_2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2 = 9 + 14 = 23$.

Aufgabe 7 Es seien x_1 und x_2 die Lösungen der Gleichung $x^2 - 6x + 1 = 0$. Man zeige, dass $x_1^n + x_2^n$ stets ganzzahlig und nicht durch 5 teilbar ist.

Lösung. Es ist $\sigma_1 = x_1 + x_2 = 6$, $\sigma_2 = x_1 x_2 = 1$ und nach obigem $p_2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2 = 36 - 2 = 34$. Nun gilt

$$p_1 p_n = (x_1^n + x_2^n)(x_1 + x_2) = x_1^{n+1} + x_2^{n+1} + x_1 x_2 (x_1^{n-1} + x_2^{n-2}) = p_{n+1} + \sigma_2 p_{n-1}.$$

Wir erhalten also die Rekursion $p_{n+1} = \sigma_1 p_n - \sigma_2 p_{n-1}$. Hieraus folgt zunächst die Ganzzahligkeit von p_n. Wegen $\sigma_1 \equiv \sigma_2 \equiv 1 \pmod 5$ ergibt sich daraus $p_{n+1} \equiv p_n - p_{n-1} \pmod 5$. Als periodische Folge der Reste ($p_n \pmod 5$) erhalten wir also $1, -1, -2, -1, 1, 2, 1, -1, \ldots$.

Aufgabe 8 Man finde alle reellen Lösungen des Gleichungssystems $x + y + z = 1$, $x^3 + y^3 + z^3 + xyz = x^4 + y^4 + z^4 + 1$.

Lösung. Nach (8) mit $n = 3$ und $k = 4$ ist

$$p_4 = \sigma_1 p_3 - \sigma_2 p_2 + \sigma_3 p_1.$$

Beachtet man $\sigma_1 = p_1 = 1$ und setzt dies in die zweite gegebene Gleichung ein, so hat man $p_3 + \sigma_3 = p_4 + 1 = p_3 - \sigma_2 p_2 + \sigma_3 + 1$ bzw. $\sigma_2 p_2 = 1$. Andererseits war aber $1 = p_1^2 = p_2 + 2\sigma_2$, also $p_2 = 1 - 2\sigma_2$. Setzt man dies wiederum oben ein, so hat man $1 = \sigma_2(1 - 2\sigma_2)$ bzw. $\sigma_2^2 - \frac{1}{2}\sigma_2 + \frac{1}{2} = 0$, was keine reelle Lösung σ_2 besitzt. Folglich gibt es auch keine reelle Lösung (x, y, z) des gegebenen Gleichungssystems.

Anwendungen

Aufgabe 9 Dem Einheitskreis sei ein reguläres n-Eck $P_1 P_2 \cdots P_n$ einbeschrieben. Man zeige, dass das Produkt aller Streckenlängenquadrate $|P_i P_j|^2$, $1 \le i < j \le n$, gleich n^n ist!

Lösung. Wir legen das reguläre n-Eck so in die komplexe Ebene, dass $P_i = \nu_{i-1}$, $i = 1, \ldots, n$, wobei die ν_i gerade die n-ten Einheitswurzeln sind; $\nu_0 = 1$. Wegen $\overline{\nu_i} = \nu_{-i}$ gilt dann für $D = \prod_{1 \le i < j \le n} (\nu_i - \nu_j)$

$$\begin{aligned} |D|^2 = D\overline{D} &= \prod_{i<j} (\nu_i - \nu_j)(\nu_{-i} - \nu_{-j}) \\ &= \prod_{i<j} \nu_i (1 - \nu_{j-i}) \nu_{-i} (1 - \nu_{i-j}) \\ &= \prod_{i \ne j} (1 - \nu_{i-j}) = \prod_{k=1}^{n-1} \prod_{i=1}^{n} (1 - \nu_k) \\ &= \left(\prod_{k=1}^{n-1} (1 - \nu_k) \right)^n \end{aligned} \tag{9}$$

Nun gilt aber $f(x) = x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1 = (x - \nu_1)(x - \nu_2) \cdots (x - \nu_{n-1})$ wegen $x^n - 1 = (x - 1)(x^{n-1} + \cdots + 1)$. Setzt man hier $x = 1$ ein und vergleicht dies mit (9), so erhält man $|D|^2 = f(1)^n = n^n$.

Aufgaben

1. Welchen Rest lässt $p(x) = x^7 - 1$ bei der Division durch $q(x) = x^3 + x + 1$?
2. Es seien x_1, x_2, x_3 die Nullstellen des Polynoms x^3+3x^2-7x+1. Man ermittle $x_1^3+x_2^3+x_3^3$!
3. (a) Für welche natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$ ist $x^2 + x + 1$ ein Teiler von $x^{2n} + x^n + 1$?

   (b) Für welche $n \in \mathbb{N}$ gilt $37 \mid 1\underbrace{0\ldots0}_{n}1\underbrace{0\ldots0}_{n}1$?
4. Es seien $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ und $S(x)$ Polynome mit
$$P(x^5) + xQ(x^5) + x^2R(x^5) = (x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)S(x).$$
   Zeigen Sie, dass $x - 1$ ein Teiler von $P(x)$ ist!
5. Es sei $P(x)$ ein Polynom vom Grad n mit $P(k) = \frac{k}{k+1}$, $k = 0, \ldots, n$. Man finde $P(n+1)$!
6. Es seien a, b und c paarweise verschiedene ganze Zahlen und P ein Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten. Zeigen Sie, dass die Gleichungen
$$P(a) = b, \quad P(b) = c, \quad P(c) = a$$
   nicht gleichzeitig erfüllt werden können!
7. Man löse das folgende Gleichungssystem
$$x^5 + y^5 = 33, \quad x + y = 3.$$
8. Welche reellen Lösungen x hat die Gleichung
$$\sqrt[4]{97 - x} + \sqrt[4]{x} = 5?$$
9. Welcher Relation müssen a, b und c genügen, damit das System
$$x + y = a, \quad x^2 + y^2 = b, \quad x^3 + y^3 = c$$
   eine (komplexe) Lösung besitzt.
10. Man löse das Gleichungssystem
$$x + y + z = a, \quad x^2 + y^2 + z^2 = b^2, \quad x^3 + y^3 + z^3 = a^3!$$
11. Man ermittle alle Lösungen des Systems $x+y+z = 1$, $x^3+y^3+z^3+xyz = x^4+y^4+z^4+1$!
12. Gegeben seien $2n$ paarweise verschiedene Zahlen $a_1, \ldots, a_n$ und $b_1, \ldots, b_n$. Ein $n\times n$-Feld wird nun mit den Zahlen $a_i + b_j$ in der i^{ten} Zeile und j^{ten} Spalte gefüllt.

    Beweise: Stimmen die Produkte der Zahlen in jeder Spalte überein, so stimmen auch die Zeilenprodukte überein!
13. Man drücke $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ durch elementarsymmetrische Funktionen aus!

14. Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist die Quadratsumme der Nullstellen von $x^2 - (a-2)x - a - 1$ minimal?

15. Sind x_1 und x_2 die Nullstellen des Polynoms $x^2 - 6x + 1$, dann ist für jede natürliche Zahl n die Zahl $x_1^n + x_2^n$ ganzzahlig und nicht durch 5 teilbar.

16. Das Polynom $x^{2n} - 2x^{2n-1} + 3x^{2n-2} - \cdots - 2nx + 2n + 1$ hat keine reellen Wurzeln.

17. Ein Polynom $f(x, y)$ heißt *antisymmetrisch*, falls $f(x, y) = -f(y, x)$.

    Zeigen Sie, dass jedes antisymmetrische Polynom f die Gestalt $f(x, y) = (x - y)g(x, y)$ mit einem symmetrischen Polynom g hat!

18. Ist $f(x, y)$ symmetrisch und $(x - y) \mid f(x, y)$, dann gilt $(x - y)^2 \mid f(x, y)$.

19. Man löse die Gleichung $z^8 + 4z^6 - 10z^4 + 4z^2 + 1 = 0$!

20. Man löse die Gleichung

$$4z^{11} + 4z^{10} - 21z^9 - 21z^8 + 17z^7 + 17z^6 + 17z^5 + 17z^4 - 21z^3 - 21z^2 + 4z + 4 = 0!$$

21. Welchen Rest lässt $x^{100} - 2x^{51} + 1$ bei der Division durch $x^2 - 1$?

22. Zeigen Sie: $(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) \mid (x^{44} + x^{33} + x^{22} + x^{11} + 1)$.

23. Man löse die Gleichung $x^4 + a^4 - 3ax^3 + 3a^3x = 0$ bei gegebenem a.

24. Man bestimme a und b so, dass $(x - 1)^2 \mid (ax^4 + bx^3 + 1)$!

25. Für welche $n \in \mathbb{N}$ gilt

    (a) $(x^2 + x + 1) \mid ((x + 1)^n - x^n - 1)$?

    (b) $(x^2 + x + 1) \mid ((x + 1)^n + x^n + 1)$?

26. Man beweise, dass $(x^k - a^k) \mid (x^n - a^n)$ genau dann, wenn $k \mid n$!

27. Man ermittle a, so dass -1 eine mehrfache Nullstelle von $x^5 - ax^2 - ax + 1$ ist!

Attribution Section

schueler (2004-09-09): Contributed to KoSemNet
graebe (2004-09-09): Prepared along the KoSemNet rules