Kombinatorik für Klasse 8

Lisa Sauermann

März 2013

Kombinatorik ist ein Gebiet, das oft bei Mathematikolympiaden vorkommt. Es gibt dabei Aufgaben in beliebigen Schwierigkeitsstufen. In unteren Klassenstufen werden oft Aufgaben vom Typ der Aufgaben 2–4 gestellt. Solche Aufgaben löst man wie weiter unten erklärt wird, aber wie euch sicherlich schon bekannt ist. Deshalb sollen diese Aufgabentypen hier nicht weiter besprochen werden, wer sich darin unsicher fühlt, findet unter den Bundesrundenaufgaben Klasse 8 aus den vergangenen Jahren zahlreiche Beispiele. Oft sind diese noch mit Wahrscheinlichkeitsüberlegungen bei irgendwelchen Spielen mit bunten Kugeln in verschiedenen Töpfen verbunden. Dies macht die Aufgaben aber auch nicht interessanter.

Für einen zweiten, bei Bundesrunden Klasse 8 oft vorkommender Aufgabentyp ist Aufgabe 1 ein Beispiel. Auch diese Logikrätsel könnt ihr bei Bedarf anhand von alten Aufgaben üben.

Hier sollen dagegen Kombinatorikaufgaben, die nicht so standardmäßig mit diesem Lösungsprinzipien durchgehen, besprochen werden. Denn auch solche Aufgaben findet man in Bundesrunden Klasse 8. Es gibt einige Lösungstricks, die dafür und auch für Olympiadeaufgaben in den kommenden Jahren wichtig und nützlich sind.

Logik-Rätsel

Aufgabe 1 (400841) Beim großen Preis von Schönheide wurde unter den Springreitern ein Stechen erforderlich, an dem nur noch Alex, Boris, Chris und Danny teilnahmen. Bei einem solchen Stechen erreicht jeder der vier Reiter genau eine Platznummer (Erster, Zweiter, Dritter, Vierter). Einige Fans machten Vorhersagen, etwas nebulös, wie sie es gewohnt waren. Sie sagten:

(1) Jede der vier Platznummern wird genau einmal erreicht.

(2) Wenn Alex nicht erster wird, dann wird Chris Vierter.

(3) Und wenn Chris Dritter wird, dann wird Alex sogar Letzter.

(4) Nun, jedenfalls wird Alex, verglichen mit Danny, einen besseren Platz erreichen.

(5) Immerhin: Wenn Boris nicht Erster wird, dann wird Alex Dritter.

(6) Wenn Chris Zweiter wird, dann wird Danny gewiss nicht Vierter.

This material belongs to the Public Domain KoSemNet data base. It can be freely used, distributed and modified, if properly attributed. Details are regulated by the *Creative Commons Attribution License*, see `http://creativecommons.org/licenses/by/3.0`.
For the KoSemNet project see `http://www.lsgm.de/KoSemNet`.

(7) Wenn Chris sogar Erster wird, dann wird Danny Zweiter.

(8) Wenn aber Danny nicht Zweiter wird, dann wird auch Boris nicht Zweiter.

Ein weiterer Fan, der das hörte, meinte: Wenn alle Vorhersagen wahr sind, dann gibt es ja höchstens eine Möglichkeit, wie sich die Plätze verteilen! Zeige, dass er recht hat! Wie lautet diese Platzverteilung? Weise auch nach, dass in der Tat bei dieser Platzverteilung alle Vorhersagen (1) bis (8) wahr sind!

Hinweis: Eine Aussage vom Typ „Wenn-dann“, in der die mit „Wenn“ eingeleitete — und ohne dieses „Wenn“ betrachtete — Aussage falsch ist, ist wahr.

Bei solchen Aufgaben empfiehlt es sich, eine Tabelle mit den Zeilen Alex, Boris, Chris, Danny und den Spalten Erster, Zweiter, Dritter, Vierter anzulegen und die einzelnen Aussagen dort einzutragen. Mit verschiedenen Farben (deshalb immer Buntstifte oder Fineliner zu Klausuren mitnehmen!) kann man dann die Aussagen vom Typ „Wenn-dann“ eintragen. So behält man die Übersicht und kommt zügig zur Lösung.

Permutationen, Variationen, Kombinationen

Aufgabe 2 Die 16 Bundesländer nehmen bei der Bundesrunde in der (inoffiziellen) Länderwertung eine eindeutige Rangfolge von 1 bis 16 ein. Wie viele Möglichkeiten gibt es für die Reihenfolge der Platzierung von Sachsen, Sachsen-Anhalt, Thüringen, Brandenburg, Berlin und Mecklenburg-Vorpommern? Wie viele Möglichkeiten gibt es, wenn Sachsen die Bundesrunde gewinnt?

Aufgabe 3 Sachsen und NRW sind bei der Bundesrunde besondere Konkurrenten. Wie viele Möglichkeiten für die Platzierungen von Sachsen und NRW innerhalb der 16 Bundesländer gibt es insgesamt?

Aufgabe 4 (360941, Aufgabentext geändert) Ein Fotoklub möchte eine Serie von Blättern zum Verteilen herstellen. Auf jedem Blatt sollen 6 Bilder sein. Für solche Bilder stehen insgesamt 10 verschiedene Motive zur Verfügung. Jede mögliche Zusammenstellung von 6 verschiedenen dieser Motive soll in einer beliebigen Reihenfolge auf genau einem Blatt vorkommen. Wie viele solche Blätter gibt es dann? Wieviele Exemplare (kleinstmöglihe Anzahl) von jedem der Motive reichen aus?

In Aufgabe 2 geht es um die möglichen Reihenfolgen der 6 genannten Bundesländer. Für Sachsen gibt es 6 Möglichkeiten (Erster dieser 6, Zweiter dieser 6, ...). Für Sachsen-Anhalt verbleiben noch 5 Möglichkeiten (eine hat Sachsen ja schon belegt). Für Thüringen gibt es also noch 4, für Brandenburg 3, für Berlin 2 und für Mecklenburg-Vorpommern 1 Möglichkeit. Das macht insgesamt $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdots 1 = 720$ Möglichkeiten.

Wissen wir schon, dass Sachsen Erster ist, müssen wir die Anzahl der möglichen Reihenfolgen der anderen 5 Bundesländer festlegen. Nach dem gleichen Prinzip ergeben sich dafür $5 \cdot 4 \cdots 1 = 120$ Möglichkeiten.

Diese Aufgabe kann man natürlich auch für jede beliebige positive ganze Zahl n lösen. Das Produkt der ganzen Zahlen von 1 bis n bezeichnet man als $n!$ (n Fakultät). Die Anzahl der Möglichkeiten, n Objekte in eine Mögliche Reihenfolge zu bringen, ist also $n!$. Diese möglichen Reihenfolgen bezeichnet man auch als *Permutationen*. Es gibt also $n!$ verschiedene Permutationen einer Menge aus n Objekten.

Die Zahl $0!$ bezeichnet das leere Produkt (es gibt ja keinen Faktor). Deshalb wird $0! = 1$ definiert.

In Aufgabe 3 kann man die gleiche Lösungsidee anwenden: Für die Platzierung von Sachsen gibt es 16 Möglichkeiten und für die Platzierung von NRW dann noch 15. Also gibt es insgesamt $16 \cdot 15 = 240$ Möglichkeiten.

Es wird also der Reihenfolge nach erst für Sachsen eine der 16 Platznummern ausgewählt und dann für NRW eine davon verschiedene. Unter Beachtung der Reihenfolge aus n Objekten k verschiedene auszuwählen, gibt es also $n \cdot (n-1) \ldots (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$ Möglichkeiten. Diese heißen *Variationen*. In Aufgabe 3 war $n = 16$ und $k = 2$.

In Aufgabe 4 geht es um *Kombinationen* von 6 verschiedenen Bildern aus 10. Beachten wir ihre Reihenfolge auf den Blättern, erhalten wir die $\frac{10!}{4!}$ verschiedenen Variationen. Jede Kombination kommt in $6!$ verschiedenen Reihenfolgen vor, die Reihenfolge ist uns aber egal. Also müssen wir die Anzahl der Variationen durch $6!$ teilen und erhalten $\frac{10!}{4! \cdot 6!} = 210$ verschiedene Blätter.

Nun ist die Anzahl der Exemplare von jedem Bild gefragt. Jedes Bild soll mit jeder Kombination aus 5 der übrigen 9 Bilder genau einmal auftauchen. Für die Anzahl dieser Kombinationen gibt es nun $\frac{9!}{4! \cdot 5!} = 126$ Möglichkeiten, also braucht man von jedem Bild 126 Exemplare.

Aus n Objekten k verschiedene ohne Beachtung der Reihenfolge auszuwählen, gibt es also $\frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$ Möglichkeiten.

Aufgabe 5 (American High School Mathematics Examination 1989) Herr und Frau Zeta wollen ihrem Baby zwei Vornamen geben, sodass die drei Initialien paarweise verschieden und in alphabetischer Reihenfolge sind. Wie viele Möglichkeiten gibt es für das Monogramm ihres Babys?

Aufgabe 6 (American High School Mathematics Examination 1988) Am Ende eines Bowling-Turniers gibt es ein Endspiel der besten 5 Bowler der Vorrunde. Zuerst spielt der Fünfte gegen den Vierten. Der Verlierer bekommt den 5. Preis und der Gewinner spielt ein Spiel gegen den Dritten. Dabei bekommt der Verlierer den 4. Preis und der Gewinner spielt gegen den Zweiten. Dabei bekommt der Verlierer den 3. Preis und der Gewinner spielt gegen den Ersten. Der Gewinner dieses Spiels bekommt den 1. Preis und der Verlierer den 2. Preis. Wie viele verschiedene Verteilungen der Preise gibt es auf die 5 Besten der Vorrunde?

Aufgabe 7 (American Mathematics Contest 12 2001) Eine Spinne hat einen Strumpf und einen Schuh für jedes ihrer 8 Beine. In wie vielen verschiedenen Reihenfolgen kann sich die Spinne ihre Strümpfe und Schuhe anziehen, wenn an jedem Bein der Strumpf vor dem Schuh angezogen werden muss?

Aufgabe 8 (American Invitational Mathematics Examination 1996) Zwei Felder eines 7×7-Quadrates sind gelb gefärbt, die anderen grün. Zwei Färbungen werden als gleich angesehen, wenn man sie durch Drehung auseinander erhalten kann. Wie viele verschiedene Färbungen gibt es?

Binomialkoeffizienten

Die Anzahl $\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$ der Kombinationen von k Objekten aus n gegebenen bezeichnet man als $\binom{n}{k}$ (lies: n über k). Wir definieren also

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}\,.$$

Diese Schreibweise $\binom{n}{k}$ wird als Binomialkoeffizient bezeichnet.
Wieviel ist $\binom{n}{0}$, $\binom{n}{1}$, $\binom{n}{k}$, $\binom{n}{n-2}$, $\binom{n}{n-1}$ und $\binom{n}{n}$?
Diese Schreibweise wollen wir nun bei der Beantwortung folgender Frage benutzen: Was ergibt sich beim Ausmultiplizieren von $(a+b)^n$?
Es ergibt sich sicherlich eine Summe lauter Terme der Form $a^i b^{n-i}$, denn jeder Faktor $(a+b)$ der Potenz steuert entweder ein a oder ein b bei. Wie viele Summanden $a^i b^{n-i}$ gibt es für eine feste ganze Zahl $0 \le i \le n$? Es muss bei jedem solchen Summanden genau i Faktoren $(a+b)$ der Potenz geben, die ein a beisteuern. Wie viele Möglichkeiten gibt es für diese i Faktoren? Nun, das ist eine beliebige Kombination von i der insgesamt n Faktoren. Es gibt also $\binom{n}{i}$ Möglichkeiten. Damit taucht der Summand $a^i b^{n-i}$ genau $\binom{n}{i}$ mal in der Summe auf. Es gilt also

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^0 b^{n-0} + \binom{n}{1} a^1 b^{n-1} + \binom{n}{2} a^2 b^{n-2} + \cdots + \binom{n}{n} a^n b^{n-n}\,.$$

Dies können wir auch schreiben als

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i}\,.$$

Das Summenzeichen ist die Abkürzung einer Summe mit vielen Summanden. Es wird für die Laufvariable, hier i, der Reihe nach 0 (siehe unter dem Summenzeichen) bis n (über dem Summenzeichen) eingesetzt und jedesmal der Term $\binom{n}{i} a^i b^{n-i}$ gebildet. All diese Terme werden summiert. Ausgeschrieben heißt das Summenzeichen also tatsächlich

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i} = \binom{n}{0} a^0 b^{n-0} + \binom{n}{1} a^1 b^{n-1} + \binom{n}{2} a^2 b^{n-2} + \cdots + \binom{n}{n} a^n b^{n-n}\,.$$

Somit haben wir den Binomischen Lehrsatz hergeleitet.

Satz 1 *Für reelle Zahlen a und b und eine nicht negative ganze Zahl n gilt*

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i}\,.$$

Der Spezialfall $n = 2$ des Binomischen Lehrsatzes ist die erste binomische Formel. Wie erhält man die zweite binomische Formal aus dem Binomischen Lehrsatz?
Zwischen den Binomialkoeffizienten gibt es zahlreiche Identitäten und Beziehungen, von denen hier nur sehr wenige behandelt werden. Solche Beziehungen kann man durch eine kombinatorische Interpretation oder durch Herumrechnen mit den Fakultätsausdrücken nachweisen.

Eine direkt aus der Definition der Binomialkoeffizienten folgende Identität ist diese: Für n nichtnegativ, ganz und $0 \leq k \leq n$ ganz gilt

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Setzen wir im Binomischen Lehrsatz $a = b = 1$, erhalten wir folgende sehr hübsche Identität für alle nichtnegativen ganzen Zahlen n

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n\,.$$

Für $n \geq 1$ ganz und $0 \leq k \leq n-1$ ganz gilt

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}\,.$$

Dies Formel lässt sich am einfachsten durch eine kombinatorische Interpretation zeigen. Tipp: Stelle dir n Schüler beim Landesseminar vor, von denen einer zu spät zum Vortrag kommt.

Aufgabe 9 (Rumänische Mathematikzeitschrift) Sei n eine ungerade Zahl größer 1. Zeige, dass die Folge

$$\binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \ldots, \binom{n}{\frac{n-1}{2}}$$

eine ungerade Anzahl ungerader Zahlen enthält.

Binomialkoeffizienten kommen auch vor, wo man sie gar nicht vermutet:

Aufgabe 10 Finde einen Ausdruck als Binomialkoeffizienten für die Anzahl der Möglichkeiten, 2009 als Summe von 48 positiven ganzzahligen Summanden darzustellen (zwei Darstellungen gelten hier auch als verschieden, wenn sie sich nur in der Reihenfolge der Summanden unterscheiden)!

Aufgabe 11 (American Invitational Mathematics Examination 1998) Finde die Anzahl geordneter Quadrupel (x_1, x_2, x_3, x_4) positiver ungerader Zahlen mit $x_1+x_2+x_3+x_4 = 98$.

Aufgabe 12 (American High School Mathematics Examination 1994) Neun Stühle in einer Reihe sollen von 6 Schülern und den drei Lehrern Herrn Alpha, Herrn Beta und Herrn Gamma belegt werden. Die drei Lehrer betreten den Raum zuerst und wollen sich so hinsetzen, dass jeder neben zwei Schüler sitzen wird. Wie viele Möglichkeiten haben die drei Lehrer, sich hinzusetzen?

Aufgabe 13 Finde die Anzahl der Möglichkeiten, aus den ganzen Zahlen von 1 bis 18 fünf Zahlen auszuwählen, so dass sich je zwei davon um mindestens 2 unterscheiden.

Doppeltes Abzählen und Permutationen

Eine sehr wichtige Beweismethode bei Kombinatorikaufgaben ist doppeltes Abzählen. Die Idee ist einfach: Wir zählen die Anzahl bestimmter Dinge auf zwei verschiedene Weisen. Dann müssen beide Anzahlen gleich sein. Dies kann man beispielsweise benutzen um Identitäten zu zeigen, die man dazu kombinatorisch interpretiert. Oder aber man kann zeigen, dass beispielsweise irgendwelche Anzahlen gerade sein müssen, weil sie sich auf eine andere Art und Weise abzählen lassen, bei der offensichtlich eine gerade Anzahl herauskommt.

Man benutzt doppeltes Abzählen oft schon intuitiv ohne es zu merken, z. B. wenn man einen Haufen Bonbons in Fünferhäufchen zerlegt, um leichter nachzählen zu können. Um das Prinzip also gut zu verdeutlichen, behandeln wir eine schwere Beispielaufgabe, die man ohne bewusstes Anwenden dieser Tehnik vermutlich nur sehr umständlich lösen kann.

Beschäftigen wir uns aber zunächst noch einmal etwas näher mit Permutationen, die ja ein wichtiges Thema in der Kombinatorik sind. Betrachten wir eine Permutation P der Menge $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$. Diese können wir nun folgendermaßen interpretieren: Die Zahlen von 1 bis n, die anfangs geordnet sind, vertauschen sich nun und stellen sich in der von P vorgegebenen Reihenfolge auf. Dabei laufen sie wild durcheinander. Aber betrachten wir nun die Art und Weise ihrer Vertauschung anhand eines Beispiels:

Es sei $n = 7$ und $P = 3524176$. Die 1 geht zum Platz der 5. Die 5 hat diesen Platz verlassen und ist nun auf dem Platz der 2. Die 2 ist auf dem Platz der 3 und die 3 ist auf dem Platz der 1. So haben die Zahlen 1,5,2,3 zyklisch getauscht (also einen Ringtausch gemacht). Auch 6,7 bilden einen Zyklus (in Form einer einfachen Vertauschung dieser zwei Zahlen). 4 bildet alllein einen Zyklus, diese Zahl ist stehen geblieben. Das nennt man auch Fixpunkt.

Auf diese Art und Weise lässt sich jede Permutaion in Zyklen zerlegen. Wie sieht eine Permutation von $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ aus, bei der jede Zahl allein in einem solchen Zyklus liegt? Finde ein Beispiel einer Permutation, die insgesamt ein Zyklus ist (sich also nicht in noch kleinere zerlegen lässst)!

Von besonderem Interesse sind die Fixpunkte, d. h. die Zahlen k, die bei der Permutation an der k-ten Stelle stehen (also ihren Platz nicht ändern). Dazu folgende Aufgabe, die man mit doppeltem Abzählen lösen kann.

Aufgabe 14 (1. Aufgabe IMO 1987) Sei S die Menge $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$. Wir bezeichnen die Anzahl der Permutationen von S, die genau k Fixpunkte haben, mit $p_n(k)$. Zeige, dass

$$\sum_{i=0}^{n} k\, p_n(k) = n!$$

gilt. Tipp: Interpretiere die Summanden als Anzahlen.

Graphen

Graphen sind ein gutes Mittel zur Veranschaulichung von Freundschafts- oder Feinschaftsbeziehungen zwischen Personen. Grob gesagt besteht ein Graph aus einer endlichen Anzahl von Ecken (auch Knoten gennnt) und Kanten als Linien zwischen zwei Ecken. Beispielsweise könnten wir einen Graphen mit den gerade anwesenden Personen als Ecken zeichnen, bei dem je zwei Ecken genau dann verbunden sind, wenn sich die entsprechenden Personen schon vor dem Landesseminar kannten.

Folgende Aufgabe lässt sich leicht mithilfe von Graphen und doppeltem Abzählen lösen

Aufgabe 15 In einem Raum befinden sich gewisse Personen, von denen sich einige per Handschlag begrüßt haben und einige nicht. Zeige, dass die Anzahl der Personen, die ungerade vielen anderen die Hand gegeben hat, gerade ist.

Aufgabe 16 Auf einer Party sind $2\,n \geq 2$ Personen und jede Person hat eine gerade Anzahl an Freunden. (Wenn A mit B befreundet ist, dann ist auch B mit A befreundet; keiner ist mit sich selbst befreundet). Zeige, dass es zwei Personen mit einer geraden Anzahl gemeinsamer Freunde auf der Party gibt.

In einem Graphen kann man auch Kanten färben, wie in dieser Aufgabe:

Aufgabe 17 6 Punkte in der Ebene sind paarweise durch Strecken verbunden. Jede dieser 15 Strecken ist rot oder blau gefärbt. Zeige, dass es ein einfarbiges Dreieck gibt.

Aufgabe 18 17 Mathematiker korrespondieren paarweise miteinander über jeweils genau eines der folgenden drei Medien: Post, Fax, Email. Zeige, dass es drei dieser 17 Mathematiker gibt, die paarweise mit dem gleichen Medium korrespondieren.

Invarianzprinzip

Das Invarianzprinzip als wichtige Methode soll hier nicht fehlen. Das Finden von Invarianten (Größen, die während eines Prozesses gleich bleiben) oder Halbinvarianten (Größen, die sich bei einem Prozess stets verkleinern oder stets vergrößern) ist bei manchen Aufgabe zur Lösung unumgänglich.

Aufgabe 19 In einem 4×4-Quadrat steht auf 15 Feldern 1 und auf einem Feld -1. In einem Schritt darf man in einer Zeile, einer Spalte oder einem 2×2-Quadrat alle Vorzeichen ändern. Kann man dadurch erreichen, dass überall Einsen stehen?

Aufgabe 20 (Klausur beim Landesseminar 2004 Klasse 8) Auf einer abgelegenen Insel leben 50 braune, 57 grüne, 62 gelbe und 68 rote Frösche. Immer, wenn sich drei Frösche unterschiedlicher Farbe begegnen, verwandeln sie sich in zwei Exemplare der vierten Farbe. Irgendwann hat man festgestellt, dass alle verbleibenden Frösche die gleiche Farbe haben. Welche Farbe ist das?

Kombinatorische Geometrie

In den letzten Jahren kamen in den Bundesrunden Klasse 8 erstaunlich viele Aufgaben aus dem Bereich der kombinatorischen Geometrie vor, deshalb wollen wir uns auch damit noch ein wenig beschäftigen.

Aufgabe 21 In der Ebene seien n Geraden in allgemeiner Lage (d. h. keine zwei parallel und keine drei schneiden sich in einem Punkt). Wie viele Schnittpunkte gibt es? In wie viele Teilstücke wird die Ebene zerlegt?

Aufgabe 22 (420845) Im Innern eines Quadrats seien genau 187 Punkte markiert. Es sollen Dreiecke gezeichnet werden, die einander nicht überdecken und folgende Forderungen erfüllen:

(1) Eckpunkte eines Dreiecks sind entweder markierte Punkte oder Eckpunkte des Quadrats.

(2) Mindestens ein Eckpunkt eines Dreiecks muss einer der markierten Punkte sein.

Wie viele Dreiecke lassen sich unter diesen Voraussetzungen höchstens bilden?

Aufgabe 23 (430845) In einem Land seien die gegenseitigen Entfernungen aller Städte verschieden groß. Eines Tages startet in jeder Stadt ein Flugzeug und fliegt nach der nächstgelegenen Stadt. Nach der Landung aller Flugzeuge stellt sich heraus, dass in keiner Stadt mehr als fünf Flugzeuge gelandet sind. Zeige, dass das kein Zufall ist.
Hinweis: Es ist zu beweisen, dass unter den genannten Voraussetzungen höchstens fünf Flugzeuge in dersellben Stadt landen können.

Aufgabe 24 (440842) Wir betrachten in einer Ebene rote und blaue Punkte, von denen niemals mehr als zwei Punkte auf einer Geraden liegen.

a) Zeichne 4 rote und 2 blaue Punkte so, dass jedes aus 3 roten Punkten gebildete Dreieck, wir werden es rotes Dreieck nennen, genau einen der blauen Punkte in seinem Innern enthält.

b) Zeichne 4 rote und 4 blaue Punkte so, dass jedes rote Dreieck genau einen blauen Punkt und jedes blaue Dreieck genau einen roten Punkt in seinem Innern enthält.

c) Welche Bedingung müssen die 4 roten Punkte erfüllen, damit die in Teil a) und Teil b) genannten Forderungen erfüllbar sind?

Aufgabe 25 (470845) Der Mathematiker Dr. Eieck veranstaltet eine Denkerparty. Dazu treib er in jede Ecke seines dreieckigen Gartens einen Pflock und schlägt zusätzlich insgesamt n weitere Pflöcke am Rand oder im Innern der Rasenfläche ein. Innerhalb des Rasens seien genau k Pflöcke ($0 \leq k \leq n$) eingesetzt, und von ihnen liegen keine drei auf einer gemeinsamen Geraden. Nun befestigt er möglichst viele, nicht unbedingt gleich lange Hängematten an den Pflöcken, die einander nicht überschneiden dürfen. Auf diese Weise wird das Rasendreieck in Teildreiecke zerlegt, in die er jeweils einen Stehtisch mit Papier, Schreibzeug und Getränken stellt.

a) Ermittle die Anzahl s der Stehtische und die Anzahl h der Hängematten für folgende konkrete Fälle:

   - $n = 3$ und k =0, 1, 2 oder 3
   - $n = 4$ und $k = 0$

   Hinweis: Dabei reicht es, jeweils einen solchen Fall zu betrachten, obwohl es verschiedene Möglichkeiten für die Platzierung der Pflöcke gibt.

b) Gib jeweils eine Formel für die Anzahl $s(n, k)$ von Stehtischen und die Anzahl $h(n, k)$ von Hängematten in Abhängigkeit von n und k an und berechne $s(33, 22)$ und $h(33, 22)$.

c) Beweise die Richtigkeit dieser beiden Formeln.

Weiteres Training

Die beste Vorbereitung auf die Bundesrunde oder kommende Olympiaden ist meiner Meinung nach das Training anhand von alten Aufgaben. Auf der Internetseite des Mathematikolympiadevereins findet sich das Aufgabenarchiv mit den Aufgaben der vergangenen zehn Jahre (www.mathematik-olympiaden.de).

Ein Klassiker zum Olympiadetraining ist „Problem Solving Strategies“ von Arthur Engel, Springer-Verlag. Vor dem Englisch sollte man keine Angst haben, da der Autor ein Deutscher ist, ist es sehr verständlich geschrieben.

Als gutes Buch voller Kombinatorikaufgaben kann ich „102 Combinatorial Problems“ von Titu Andreescu, Zuming Feng (Birkhäuser) empfehlen, viele Aufgaben dieses Vortrags entstammen diesem Buch (frei übersetzt).

Attribution Section

sauermann (Mrz 2013): Für KoSemNet freigegeben.

graebe (2014-01-01): Nach den KoSemNet Regeln aufbereitet.