Sätzesammlung Elementargeometrie. Ein Kompendium für Klasse 10

Lisa Sauermann

März 2013

Grundlage zum Lösen elementargeometrischer Aufgaben ist die Kenntnis geometrischer Sachverhalte und Sätze, von denen einige hier überblicksartig aufgeführt sind. Die Beweise lassen sich bei Bedarf in zahlreichen Geometriebüchern oder im Internet nachlesen. Besonders empfohlen sei das Geometriekapitel von Christian Reiher in „Ein-Blick in die Mathematik“ (von Richard Bamler, Christian Reiher et al., Aulis Verlag Deubner).

Dreiecksgeometrie

- Die Winkelhalbierende und die Mittelsenkrechte der gegenüberliegenden Seite eines Dreiecks schneiden sich auf dem Umkreis.
- Der Bildpunkt des Höhenschnittpunkts eines Dreiecks bei Spiegelung an einer Dreiecksseite liegt auf dem Umkreis. Der Bildpunkt des Höhenschnittpunkts bei Spiegelung an einem Seitenmittelpunkt liegt ebenfalls auf dem Umkreis und liegt dem der Dreiecksseite gegenüberliegenden Eckpunkt auf dem Umkreis diametral gegenüber.
- Der Inkreismittelpunkt eines Dreiecks ist der Höhenschnittpunkt des zugehörigen Dreiecks aus den drei Ankreismittelpunkten.
- Der Höhenschnittpunkt eines Dreiecks ist der Inkreismittelpunkt des zugehörigen Dreiecks aus den drei Höhenfußpunkten.
- Der Umkreismittelpunkt eines Dreiecks ist der Höhenschnittpunkt des zugehörigen Dreiecks aus den drei Seitenmittelpunkten.
- **Euler-Gerade:** Höhenschnittpunkt, Schwerpunkt, Feuerbachkreismittelpunkt und Umkreismittelpunkt eines Dreiecks liegen auf einer Gerade, der Euler-Gerade. Dabei wird die Strecke vom Umkreismittelpunkt zum Höhenschnittpunkt vom Schwerpunkt im Verhältnis 1 : 2 geteilt und der Feuerbachkreismittelpunkt ist ihr Mittelpunkt.
- **Feuerbachkreis:** Die drei Seitenmittelpunkte, die drei Höhenfußpunkte und die drei Mittelpunkte der oberen Höhenabschnitte (d. h. der Strecken zwischen Eckpunkt und

Höhenschnittpunkt) liegen auf einem Kreis, welcher Feuerbachkreis oder Neun-Punkte-Kreis genannt wird.

- **Simson-Gerade:** Für ein Dreieck ABC und einen Punkt P liegen die Lotfußpunkte von P auf die Geraden AB, BC und CA durch die Seiten des Dreiecks genau dann auf einer Geraden, wenn P auf dem Umkreis des Dreiecks ABC liegt.

- **Satz von Ceva:** Für ein Dreieck ABC und von den Ecken verschiedene Punkte X, Y und Z auf den Geraden BC, CA bzw. AB schneiden sich die Geraden AX, BY bzw. CZ genau dann in einem Punkt, wenn

$$\frac{|BX|}{|XC|} \cdot \frac{|CY|}{|YA|} \cdot \frac{|AZ|}{|ZB|} = 1$$

gilt. Die Streckenlängen sind dabei als orientierte Streckenlängen zu verstehen.

- **Trigonometrischer Ceva:** Für ein Dreieck ABC und von den Ecken verschiedene Punkte X, Y und Z auf den Geraden BC, CA bzw. AB schneiden sich die Geraden AX, BY bzw. CZ genau dann in einem Punkt, wenn

$$\frac{\sin(\angle BAX)}{\sin(\angle XAC)} \cdot \frac{\sin(\angle CBY)}{\sin(\angle YBA)} \cdot \frac{\sin(\angle ACZ)}{\sin(\angle ZCB)} = 1$$

gilt. Die Winkelgrößen sind dabei als orientierte Winkelgrößen zu verstehen.

- **Satz von Menelaos:** Für ein Dreieck ABC liegen von den Ecken verschiedene Punkte X, Y und Z auf den Geraden BC, CA bzw. AB genau dann auf einer Gerade, wenn

$$\frac{|BX|}{|XC|} \cdot \frac{|CY|}{|YA|} \cdot \frac{|AZ|}{|ZB|} = -1$$

gilt. Die Streckenlängen sind dabei als orientierte Streckenlängen zu verstehen.

- **Satz von Carnot:** Für ein Dreieck ABC und Punkte X, Y und Z schneiden sich die drei Senkrechten zu den Geraden BC, CA und AB durch X, Y bzw. Z genau dann in einem Punkt, wenn

$$|BX|^2 - |XC|^2 + |CY|^2 - |YA|^2 + |AZ|^2 - |ZB|^2 = 0$$

gilt.

- **Satz von Stewart:** Für ein Dreieck ABC und einen Punkt P auf der Geraden BC gilt

$$|AC|^2 \cdot |BP| + |AB|^2 \cdot |CP| = |BC| \cdot \left(|BP| \cdot |CP| + |AP|^2\right) .$$

- **Dreiecksfläche:** Die Fläche eines Dreiecks mit Seitenlängen a, b, c, Umkreisradius R, Inkreisradius r, und Halbumfang $s = \frac{a+b+c}{2}$ beträgt

$$\sqrt{s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)} = r \cdot s = \frac{a\,b\,c}{4\,R} .$$

Vierecke

- **Satz von Ptolemäus:** Für ein Sehnenviereck $ABCD$ gilt

$$|AB| \cdot |CD| + |BC| \cdot |DA| = |AC| \cdot |BD| \ .$$

- **Ungleichung von Ptolemäus:** Für ein beliebiges Viereck $ABCD$ gilt

$$|AB| \cdot |CD| + |BC| \cdot |DA| \geq |AC| \cdot |BD|$$

  mit Gleichheit genau dann, wenn A, B, C, D in dieser Reihenfolge auf einem Kreis oder auf einer Geraden (als entartetem Kreis) liegen.

- **Satz von Newton:** Für ein Viereck $ABCD$, dessen gegenüberliegende Seiten sich in E bzw. F schneiden, liegen die Mittelpunkte der Strecken $|AC|$, $|BD|$ und $|EF|$ auf einer Geraden.

- **Parallelogrammungleichung:** Für ein beliebiges Viereck $ABCD$ gilt

$$|AB|^2 + |BC|^2 + |CD|^2 + |DA|^2 \geq |AC|^2 + |BD|^2$$

  mit Gleichheit genau dann wenn $ABCD$ ein Parallelogramm ist.

Wichtige Sätze der projektiven Geometrie

- **Satz von Pappos:** Gegeben sind zwei Geraden und A, B, C bzw. D, E, F drei Punkte auf jeweils einer der Geraden. Dann liegen die drei Schnittpunkte von AE mit BD, AF mit CD bzw. BF mit CE auf einer Geraden.

- **Satz von Pascal:** Seien A, B, C, D, E und F sechs Punkte auf einem Kreis. Dann liegen die drei Schnittpunkte von AE mit BD, AF mit CD bzw. BF mit CE auf einer Geraden. Das heißt, die drei Schnittpunkte der drei Paare gegenüberliegender Seiten eines Sehnensechsecks (hier $AECDBF$) liegen auf einer Geraden.

- **Satz von Brianςon:** Sei $ABCDEF$ ein Tangentensechseck. Dann schneiden sich die drei Geraden AD, BE und CF in einem Punkt.

- In den Sätzen von Pascal und Brianςon dürfen auch Punkte des Kreises bzw. Berührpunkte am Kreis doppelt benutzt werden.

weitere Hilfsmittel

- zentrische Streckungen
- ähnliche Dreiecke
- Sehnenvierecke suchen
- eine gute Skizze (!!)
- scharfes Hinschauen und ein geübter Blick

Attribution Section

sauermann (Mrz 2013): Für KoSemNet freigegeben.
graebe (2014-01-01): Nach den KoSemNet Regeln aufbereitet.