Hilfsmittel bei Geometrieaufgaben.
Ein Kompendium für Klasse 8

Lisa Sauermann

März 2013

Geometrie ist ein wichtiges Gebiet bei der Olympiade, das neben viel Kreativität und einem geübtem Auge auch einige theoretische Kenntnisse erfordert. Im Folgenden sollen deshalb die wichtigsten grundlegenden geometrischen Sachverhalte sowie einige Beweisstrategien zusammengefasst werden. Es sind dabei auch schwierigere Resultate erwähnt, vielleicht weckt dies das Interesse an der selbstständigen Beschäftigung mit diesen. Dazu sei beispielsweise das Geometriekapitel des Buches „Ein-Blick in die Mathematik“ (Richard Bamler, Christian Reiher et al., Aulis Verlag Deubner) empfohlen.

1 Beweismethoden und Aufgabentypen

1.1 Aufgabentypen

- Bei allen Aufgabentypen: Man darf Lagebeziehungen nicht einfach voraussetzen, sondern muss sie gegebenenfalls in einer Lagebetrachtung begründen! Manchmal sind auch Fallunterscheidungen notwendig.
- Bestimmungsaufgaben einer Länge oder eines Winkels: Aus den Voraussetzungen ist die gesuchte Größe abzuleiten.
- Bestimmungsaufgaben aller möglichen Größen einer Länge oder eines Winkels: Es müssen alle möglichen Werte angegeben werden, gezeigt werden, dass es keine weiteren gibt, und nachgewiesen werden, dass diese Werte tatsächlich möglich sind.
- Aussagen vom Typ „Wenn, dann“: Aus den Voraussetzungen muss die Behauptung geschlussfolgert werden.
- Aussagen vom Typ „Genau dann, wenn“: Es sind zwei Richtungen zu zeigen.
- Aufgaben vom Typ „Bestimme den geometrischen Ort“: Es ist eine Aussage vom Typ „Genau dann, wenn“ (2 Richtungen!) zu zeigen. Die Behauptung muss man aber selbst noch finden. Dazu helfen mehrere Skizzen, um eine Vermutung abzuleiten.

- Konstruktionsaufgaben (im Allgemeinen mit Zirkel und Lineal, wenn nicht anders vermerkt):
  - Konstruktionsbeschreibung;
  - Angabe, wann sich bei der Konstruktion wie viele gesuchte Objekte ergeben;
  - Nachweis, dass es neben den konstruierten keine weiteren Objekte geben kann, die die Bedingungen erfüllen;
  - Nachweis, dass die konstruierten Objekte tatsächlich die Bedingungen erfüllen;
  - eventuell Konstruktionszeichnung (Durchführung der Konstruktion an einem Beispiel).

  Absolute Grundkonstruktionen dürfen vorausgesetzt werden (Konstruktion von Mittelsenkrechten, Winkelhalbierenden, Senkrechte auf Gerade durch Punkt, Parallele zu Gerade durch Punkt)

1.2 Beweismethoden

- Geometrische Örter: Einige geometrische Objekte lassen sich als geometrische Örter interpretieren. Beispielsweise ist die Mittelsenkrechte einer Strecke $\overline{AB}$ der geometrische Ort aller Punkte der Ebene, die von den Punkten A und B den gleichen Abstand haben. Die Innenwinkelhalbierende und die Außenwinkelhalbierende eines Winkels $\angle BAC$ bilden den geometrischen Ort aller Punkte der Ebene, die von den Geraden AB und AC den gleichen Abstand haben.
- „Winkeljagd“: So lange alle Winkel ausrechnen (d. h. durch andere Winkel, wie beispielsweise die Innenwinkel eines Dreiecks, ausdrücken), bis die Behauptung gezeigt ist.
- Herumrechnen mit Streckenlängen: beispielsweise im Zusammenhang mit den Sätzen von Ceva und Menelaos.
- Suchen von Sehnenvierecken: Sehnenvierecke spielen in vielen Aufagben den entscheidenden Schritt bei der Lösungsfindung. Auch bei der „Winkeljagd“ sind sie hilfreiche Geschütze.
- Suchen von ähnlichen oder kongruenten Dreiecken: Aus Aussagen über Strecken ergeben sich so Aussagen über Winkel und umgekehrt.
- Betrachten von Drehungen, zentrischen Streckungen oder Drehstreckungen: geht ein Teil der Figur durch eine Drehung, zentrischen Streckung oder Drehstreckung (oder seltener auch Spiegelung) in einen anderen Teil über, lassen sich meist wertvolle Aussagen ableiten.

1.3 Herangehensweisen beim Finden von Beweisen

- korrekte Skizze!
- Wenn man nicht weiter kommt: Neue Skizze machen!

- Wie kann man Voraussetzungen benutzen? Was würde reichen, um die Behauptung zu zeigen?
- Aufstellen von Zwischenbehauptungen, diesbezügliche Vermutungen anhand von Skizze(n) finden und überprüfen.
- Alle Erkenntnisse in Skizze deutlich machen (z. B. gleich große Winkel mit gleicher Farbe markieren), dafür Bunststifte zu Klausur mitbringen!
- Neu eingeführte Punkte sinnvoll benennen.

2 Sätze und Sachverhalte

2.1 Allgemeines

- Nebenwinkelsatz, an parallelen Geraden Stufenwinkelsatz und Wechselwinkelsatz
- Kongruenzsätze sss, sws, wsw und SsW
- Ähnlichkeitssätze www, sss, sws und SsW (s steht hier für gleiche Seitenverhältnisse)
- Strahlensätze: Sind AB und $A'B'$ parallele Geraden und P der Schnittpunkt der Geraden AA' und BB', so gilt:
  - erster Strahlensatz:
  $$\frac{|PA|}{|PA'|} = \frac{|PB|}{|PB'|}\,.$$
  - zweiter Strahlensatz:
  $$\frac{|PA|}{|PA'|} = \frac{|AB|}{|A'B'|}\,.$$
  - dritter Strahlensatz: Liegt außerdem noch C auf der Geraden AB, C' auf der Geraden $A'B'$ und P ebenfalls auf der Geraden CC', so gilt
  $$\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|BC|}{|B'C'|}\,.$$

  Umkehrbar sind nur der erste und der zweite Strahlensatz.

2.2 Am Kreis

- Ein konvexes Viereck $ABCD$ ist genau dann ein Sehnenviereck (d. h. alle vier Ecken liegen auf einem gemeinsamen Kreis), wenn $|\angle CBA| + |\angle ADC| = 180°$ gilt.
- Peripheriewinkelsatz: Liegen die vier Punkte A, B, C und D in dieser Reihenfolge auf einem Kreis, so gilt $|\angle ACB| = |\angle ADB|$.
- Zentri-Peripheriewinkelsatz: Liegen die drei Punkte A, B und C auf einem Kreis um den Punkt O, so gilt $2 \cdot |\angle ACB| = |\angle AOB|$.

- Sehnentangentenwinkelsatz: Liegen die drei Punkte A, B und C auf einem Kreis und der Punkt P auf der Tangenten an diesen Kreis in A, wobei P und C auf verschiedenen Seiten der Geraden AB liegen, so gilt $|\angle ACB| = |\angle PAB|$.
- Tangentenabschnittssatz: Berühren die beiden Tangenten von einem Punkt P an einen Kreis diesen in den Punkten A und B, so gilt $|PA| = |PB|$.
- Sehnen-Satz: Liegen die vier Punkte A, B, C und D auf einem Kreis und der Schnittpunkt P der Geraden AB und CD innerhalb dieses Kreises, so gilt $|PA| \cdot |PB| = |PC| \cdot |PD|$.
- Sekanten-Satz: Liegen die vier Punkte A, B, C und D auf einem Kreis und der Schnittpunkt P der Geraden AB und CD außerhalb dieses Kreises, so gilt $|PA| \cdot |PC| = |PB| \cdot |PD|$.
- Sehnen-Sekanten-Satz: Liegen die vier Punkte A, B, C und D auf einem Kreis und ist P der Schnittpunkt der Geraden AB und CD, so gilt $|PA| \cdot |PC| = |PB| \cdot |PD|$.

2.3 Dreiecksgeometrie

Über Höhenschnittpunkt und Umkreismittelpunkt:

- Die drei Höhen, Seitenhalbierenden, Mittelsenkrechten und Winkelhalbierenden schneiden sich jeweils in einem Punkt (Höhenschnittpunkt, Schwerpunkt, Umkreismittelpunkt bzw. Inkreismittelpunkt).
- Die Spiegelbilder vom Höhenschnittpunkt an den Dreiecksseiten liegen auf dem Umkreis.
- Das Spiegelbild vom Höhenschnittpunkt eines Dreiecks ABC am Mittelpunkt der Strecke $\overline{BC}$ liegt auf dem Umkreis und bildet verbunden mit dem Punkt A einen Durchmesser des Umkreises.
- Das Spiegelbild der Höhe an der Winkelhalbierenden der gleichen Ecke verläuft durch den Umkreismittelpunkt.
- Bei zentrischer Streckung am Schwerpunkt mit Streckfaktor $-\frac{1}{2}$ geht das Dreieck in sein Seitenmittendreieck über. Der Höhenschnittpunkt geht dabei in den Umkreismittelpunkt über.
- Eulergerade: Höhenschnittpunkt, Schwerpunkt und Umkreismittelpunkt liegen auf einer Geraden.
- Feuerbachkreis: Die drei Seitenmittelpunkte, die drei Höhenfußpunkte und die drei Mittelpunkte der Verbindungsstrecken des Höhenschnittpunktes mit den Ecken liegen auf einem Kreis. Der Mittelpunkt dieses Kreises liegt ebenfalls auf der Eulergeraden.

Über die Winkelhalbierenden:

- Winkelhalbierende und gegenüberliegende Mittelsenkrechte schneiden sich auf dem Umkreis.

- Es seien a, b, c die Seitenlängen und $s = \frac{a+b+c}{2}$ der Halbumfang eines Dreiecks. Dann betragen die Längen der Tangentenabschnitte von den Ecken an den Inkreis $s-a$, $s-b$ bzw. $s-c$. Die Tangentenabschnitte jeder Ecke an den gegenüberliegenden Ankreis haben die Länge s.
- Ist r der Inkreisradius und s der Halbumfang eines Dreiecks, dann beträgt dessen Fläche $r \cdot s$.
- Inkreis- und Ankreisberührpunkt an eine Dreiecksseite liegen bezüglich des Mittelpunkts dieser Dreiecksseite gespiegelt.
- Innenwinkelhalbierende und Außenwinkelhalbierende stehen aufeinander senkrecht.
- Der Inkreismittelpunkt ist der Höhenschnittpunkt des Ankreisberührpunktdreiecks.
- Der Höhenschnittpunkt ist der Inkreismittelpunkt der Höhenfußpunktdreiecks.
- Satz von der Winkelhalbierenden: Wenn die Winkelhalbierende durch A in einem Dreieck ABC die Seite $\overline{BC}$ im Punkt D schneidet, so gilt
$$\frac{|BD|}{|DC|} = \frac{|AB|}{|AC|}\,.$$
- Die drei Verbindungsstrecken der Ecken mit den jeweils gegenüberliegenden Inkreisberührpunkten schneiden sich in einem Punkt, dem Gergonne-Punkt.
- Die drei Verbindungsstrecken der Ecken mit den jeweils gegenüberliegenden Ankreisberührpunkten schneiden sich in einem Punkt, dem Nagelschen Punkt.
- Heron-Formel: Die Dreiecksfläche beträgt $\sqrt{s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}$.

2.4 Die Sätze von Ceva und Menelaos

Ist P ein Punkt auf einer Gerade AB, so können wir das Teilungsverhältnis $t(A,B;P)$ von P bezüglich der Strecke $\overline{AB}$ definieren. Ist P ein innerer Punkt der Strecke $\overline{AB}$, so beträgt dieses wie gewohnt einfach
$$t(A,B;P) = \frac{|AP|}{|PB|}\,.$$
Liegt der Punkt P außerhalb der Strecke $\overline{AB}$, so definieren wir das Teilungsverhältnis als
$$t(A,B;P) = -\frac{|AP|}{|PB|}\,.$$

Satz 1 (Satz von Ceva) *Es seien ABC ein Dreieck und D, E und F von dessen Eckpunkten verschiedene Punkte auf den Geraden BC, CA bzw. AB.*
Die Geraden AD, BE und CF schneiden sich genau dann in einem Punkt, wenn
$$t(B,C;D)\cdot t(C,A;E)\cdot t(A,B;F) = 1$$
gilt.

Satz 2 (Satz von Menelaos) *Es seien ABC ein Dreieck und D, E und F von dessen Eckpunkten verschiedene Punkte auf den Geraden BC, CA bzw. AB.*
Die Punkte D, E und F liegen nun genau dann auf einer Geraden, wenn

$$t(B,C;D)\cdot t(C,A;E)\cdot t(A,B;F)=-1$$

gilt.

Attribution Section

sauermann (Mrz 2013): Contributed to KoSemNet
graebe (2014-01-01): Prepared along the KoSemNet rules