Die „bestmöglichen“ Dreiecke

Dr. Wolfgang Moldenhauer (Bad Berka), Carsten Moldenhauer (Dresden)

Zur Lösung einer Geometrieaufgabe „Gegeben sei ein Dreieck ABC ... “ fertigt man zumeist eine Skizze an. Das Dreieck wird gezeichnet. Doch es wird gleichseitig. Die nächste Skizze zeigt ein gleichschenkliges. Ein weiterer Versuch ergibt ein rechtwinkliges – wieder ein Spezialfall. Es wirkt Murphys Gesetz: Wenn etwas schief gehen kann, dann wird es auch schief gehen. (If anything can go wrong, it will.)

Aber: Welches ist denn nun das „beste“ Dreieck? Die Suche nach diesem bestmöglichen nicht-speziellen Dreieck basiert auf dem Grundsatz von G. Polya: „Die Figur darf nicht eine unangebrachte Spezialisierung nahe legen“ ([1, S. 108]).

Es seien α, β, γ die Größen der Innenwinkel eines spitzwinkligen Dreiecks mit o. B. d. A. $90° > \alpha > \beta > \gamma$. Dann misst $90° - \alpha$ die Differenz zu einem rechtwinkligen und $\alpha - \beta$ bzw. $\beta - \gamma$ die Differenz zu einem gleichschenkligen bzw. gleichseitigen Dreieck. Es sei $\delta = \min(90° - \alpha, \alpha - \beta, \beta - \gamma)$. Da δ den kleinsten Abstand zu den Spezialfällen (rechtwinklig, gleichschenklig, gleichseitig) misst, unterscheidet sich das Dreieck mit dem größten δ dann am meisten von den Spezialfällen.

Nun gilt für das gewichtete arithmetische Mittel der Differenzen $90° - \alpha$, $\alpha - \beta$, $\beta - \gamma$ die Beziehung

$$\frac{3\ (90° - \alpha) + 2\ (\alpha - \beta) + (\beta - \gamma)}{6} = \frac{270° - (\alpha + \beta + \gamma)}{6} = 15°\ .$$

Ist $\alpha = 75°$, $\beta = 60°$, $\gamma = 45°$, so gilt $\delta = 15°$. Gilt aber nicht $\alpha = 75°$, $\beta = 60°$, $\gamma = 45°$, so ist eine der drei genannten Differenzen nach dem Schubfachschluss kleiner als $15°$.

Mithin:

Satz 1 *Das bestmögliche nicht-spezielle spitzwinklige Dreieck hat die Innenwinkel* $\alpha = 75°$, $\beta = 60°$, $\gamma = 45°$ *und es ist* $\delta = 15°$.

Jetzt seien α, β, γ die Größen der Innenwinkel eines stumpfwinkligen Dreiecks mit o. B. d. A. $\alpha > 90° > \beta > \gamma$. Das Minimum der Differenzen $\alpha - 90°$, $90° - \beta$, $\beta - \gamma$, $\gamma - 0°$ (sie messen wieder die Abweichungen von den Spezialfällen.) muss wieder möglichst groß sein. Mit $\alpha = 180° - \beta - \gamma$ ist $\alpha - 90° = 90° - \beta - \gamma < 90° - \beta$, so dass die Differenz $90° - \beta$ nicht weiter einzubeziehen ist.

Für das gewichtete arithmetische Mitte der Differenzen $\alpha - 90°$, $\beta - \gamma$, $\gamma - 0°$ gilt

$$\frac{(\alpha - 90°) + (\beta - \gamma) + 2\ (\gamma - 0°)}{4} = \frac{\alpha + \beta + \gamma - 90°}{4} = 22,5°\ .$$

Für $\alpha = 112,5°$, $\beta = 45°$, $\gamma = 22,5°$ ist $\delta = 22,5°$. Gilt aber nicht $\alpha = 112,5°$, $\beta = 45°$, $\gamma = 22,5°$, so ist eine der drei genannten Differenzen nach dem Schubfachschluss kleiner als $22,5°$.

Also gilt:

Satz 2 *Das bestmögliche nicht-spezielle stumpfwinklige Dreieck hat die Innenwinkel* $\alpha = 112,5°$, $\beta = 45°$, $\gamma = 22,5°$ *und es ist* $\delta = 22,5°$.

In [2] wird $\alpha = 80^\circ$, $\beta = 60^\circ$, $\gamma = 40^\circ$ mit dem Abstand $\delta = 10^\circ$ zu den Spezialfällen (gleichseitig, rechtwinklig und gleichschenklig) und für stumpfwinklige Dreiecke $\alpha = 108^\circ$, $\beta = 54^\circ$, $\gamma = 18^\circ$ mit $\delta = 18^\circ$ angegeben. Diese angegebenen Werte führen nicht auf das beste δ.

Literatur:

[1] Polya, George: Schule des Denkens. A. Franke Verlag, Tübingen und Basel 1995.

[2] Hendriks, Björn, Schöbel, Konrad: Immer Ärger mit den Dreiecken .... Wurzel 9+10/02, S. 226 – 229.

Attribution Section

moldenhauer (2006-07-20): Text für KoSemNet freigegeben.
graebe (2006-08-10): Umsetzung in LaTeX für das KoSemNet-Projekt.