Zum 150. Todestag des Princeps mathematicorum

Dr. Peter Glatz (Erfurt) und Dr. Wolfgang Moldenhauer (Bad Berka)

Carl Friedrich Gauß[1]
∗ 30. April 1777 in Braunschweig,
† 23. Februar 1855 in Göttingen

Inhaltsverzeichnis

[1]Bild-Quelle: `http://www.gaussjahr.de/images/gauss_bild.jpg`

1 Carl Friedrich Gauß – Fürst der Mathematiker

Zum 150. Todestag eines der bedeutendsten deutschen Gelehrten

1.1 Einleitung

Mit der PISA-Studie ist der Mathematikunterricht in Deutschland wieder einmal ins Gerede gekommen. Vom Lieblingsfach bis zum „absoluten Horror“ reichen die Sympathiebekundungen der Schüler – und wohl auch der Eltern sowie der gesamten Öffentlichkeit. Sicher kann diese wissenschaftliche Disziplin, die ein wichtiger Bestandteil unserer Kulturgeschichte und auch des naturwissenschaftlichen und technischen Fortschritts ist, den Menschen noch ein wenig näher gebracht werden, wenn man bei aktuellen Gelegenheiten zeigt, wie sie gewachsen ist und welche Personen sie unter konkreten historischen Bedingungen geprägt haben. Nur wenige Namen stehen so für Reiz und Wert der Mathematik wie der von Carl Friedrich Gauß. Man kennt die Gaußsche Normalverteilung, die Gaußsche Zahlenebene, die Gaußsche Krümmung usw. Nach ihm sind Schulen, Schüler-Wettbewerbe, Forschungsprojekte, Medaillen und Preise, Straßen und Plätze benannt worden.

Anlass für alle diese Ehrungen ist der 150. Todestag des Mathematikers, der am 23. Februar 1855 in Göttingen verstorben ist. An seine Leistungen und seine Person soll das „Gauß-Jahr-2005“ erinnern, das neben anderen Orten seine Geburtsstadt Braunschweig und die Stadt Göttingen mit zahlreichen Veranstaltungen begehen. In einer zentralen Ausstellung im Braunschweigischen Landesmuseum widmet man sich am Beispiel des Werdegangs des jungen Gauß dem sehr aktuellen Thema „Bildungsreform und Eliteförderung“.

1.2 Seine Ausbildung

Von seiner frühzeitig erkennbaren mathematischen Begabung berichten einige Anekdoten. So hat der Braunschweiger Schulmeister Büttner einmal den Schülern seiner so genannten Rechenklasse die Aufgabe gestellt, die Zahlen von 1 bis 100 zusammenzuzählen. Während er erwartete, nun für den Rest der Stunde seine Ruhe zu haben, legte der neunjährige Gauß nach ganz kurzer Zeit seine Schiefertafel mit den Worten „Ligget se.“ („Da liegt sie.“) auf den Lehrertisch. Der Junge hatte erkannt, dass man zur Lösung des gestellten Problems die Zahlen umsortieren muss: $1+100$, $2+99$ usw. Man bekommt so 50 Zahlenpaare, deren Summe immer 101 ist. Und das stand zum Erstaunen des Lehrers auf der Tafel: $50 \cdot 101 = 5050$. Ein Schüler hatte das Prinzip der Summenformel für eine arithmetische Reihe erkannt! Durch Fürsprache des Lehrers bei seinem Vater konnte Gauß ab Ostern 1788 ein Gymnasium besuchen.

Für seine weitere Entwicklung spielte eine wichtige Begegnung eine Rolle. Durch Vermittlung wurde das „Wunderkind“ 1791 dem Landesherrn Herzog Karl Wilhelm Ferdinand von Braunschweig vorgestellt (dessen Schwester im Übrigen die Weimarer Großherzogin Anna Amalia war), der von seinen Rechenkünsten beeindruckt war und für viele Jahre sein Gönner und Förderer wurde. Nur so war es für Gauß finanziell möglich, ab 1792 das Collegium Carolinum (die spätere Technische Hochschule Braunschweig) und ab 1795 die Georg-August-Universität Göttingen zu besuchen. Obwohl die Universitätsstadt im „Ausland“ lag, nämlich im Königreich Hannover, verfügte der Herzog, dass man dem Studiosus Gauß einen Freitisch (ein kostenloses Mittagessen) und jährlich 158 Taler gewähren solle.

Wegen seiner vielseitigen Interessen und Begabungen schwankte Gauß zunächst noch in der Wahl seines Studienziels zwischen den alten Sprachen und der Mathematik. Die Entscheidung fiel, als dem 19-jährigen Studenten der Nachweis gelang, dass man mit Zirkel und Lineal ein regelmäßiges 17-Eck konstruieren kann. Er fand die Lösung, indem er den Zusammenhang dieses schon sehr alten geometrischen Problems mit der Zahlentheorie erkannte. Auch später war die Zusammenschau anscheinend getrennter mathematischer Disziplinen eine der Quellen seiner wissenschaftlichen Inspirationen. Die Beschäftigung mit der Struktur von Zahlenmengen war zusätzlich angeregt worden, als ihm der Herzog eine Logarithmentafel geschenkt hatte. Später sagte Gauß einmal in einem Gespräch: „Sie glauben gar nicht, wie viel Poesie in einer Logarithmentafel steckt.“

Die Promotion fand 1799 auf Wunsch des Herzogs an der damaligen braunschweigischen Landesuniversität Helmstedt statt. Mit dem in der Arbeit vorgelegten geschlossenen Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra rückte Gauß mit 22 Jahren unter die führenden Mathematiker seiner Zeit auf. 1801 erschien seine erste große Monographie: „Disquisitiones arithmeticae“ (Arithmetische Untersuchungen). Mit dieser Schrift wurde die Zahlentheorie zur „Königin der Mathematik“, wie Gauß sie gern bezeichnete. Die Juwelen in der Krone waren für ihn die Primzahlen. Später erweiterte er den Zahlenbegriff noch zu den komplexen Zahlen hin (Gaußsche Zahlenebene).

1.3 Astronomie

Ab Herbst 1801 widmete sich Gauß, der inzwischen mit Unterstützung des Herzogs in Braunschweig als Privat-Gelehrter lebte, einem neuen Arbeitsgebiet. Da der Landesherr in Braunschweig eine Sternwarte bauen wollte, befasste sich Gauß zunehmend auch mit aktuellen astronomischen Problemen, z. B. mit der Berechnung von Sternbahnen aus wenigen beobachteten Bahnelementen. Durch die von ihm entwickelte Methode der kleinsten Quadrate zur Ausgleichung von Beobachtungsfehlern konnte er ein brauchbares Verfahren zur Bahnbestimmung entwickeln, das sogleich mit Erfolg angewendet wurde.

So hat der Astronom Franz Xaver von Zach (1754–1832) in der Neujahrsnacht 1801/02 in der Sternwarte auf dem Seeberg bei Gotha den Planetoiden Ceres wiedergefunden, den der italienische Astronom Guiseppe Piazzi (1746–1826) in Palermo bereits ein Jahr vorher entdeckt, aber dann wegen widriger Lichtverhältnisse wieder aus seinem Beobachtungsfeld verloren hatte. Später war Gauß zusammen mit seinem Schüler Johann Franz Encke (1791 1865), bekannt durch den nach ihm benannten Kometen, auch einmal persönlich in der Seeberger Sternwarte. Diese Entdeckung und einige astronomische Arbeiten hatten für Gauß verlockende Angebote zur Folge. Zum Beispiel sollte er an der Sternwarte St. Petersburg der Nachfolger des berühmten Leonhard Euler (1707–1783) werden. Gauß wollte aber in Braunschweig bleiben.

Im Jahre 1809, genau 200 Jahre nach der Herausgabe von Keplers „Astronomia nova“, erschien in Hamburg das Lehrbuch der rechnenden Astronomie von Gauß: „Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conibus solem ambientum“ (Theorie der Bewegung der in Kegelschnitten sich um die Sonne bewegenden Himmelskörper). Der Autor stellte hierin die Berechnung der kegelschnittförmigen Bahnen aus unterschiedlichen Beobachtungsdaten dar und demonstrierte dabei weitreichende Methoden der Störungsrechnung.

Einige Jahre später musste er seine Lebensplanung ändern, denn im Oktober 1806 wurde sein Gönner in der Schlacht von Jena und Auerstedt tödlich verwundet. Die Pläne zur Errichtung einer Sternwarte in Braunschweig zerschlugen sich und die Unterstützung aus den herzoglichen Kassen erlosch. So folgte Gauß, der inzwischen auch eine Familie zu versorgen hatte, im November 1807 einem Ruf an die Universität Göttingen als Professor für Astronomie und Direktor der dortigen Sternwarte. Dort blieb er bis zu seinem Lebensende. Neben seinen Verpflichtungen als Hochschullehrer musste sich der Gelehrte in ein für ihn völlig neues Aufgabenfeld einarbeiten.

1.4 Geodäsie

In der Zeit des Übergangs vom 18. zum 19. Jahrhundert beschäftigte man sich international sehr intensiv mit der Bestimmung der genauen Größe und Gestalt der Erde. Deshalb wurde von dem in Personalunion regierenden König von England und Hannover, Georg IV., auch für das Königreich Hannover eine Landesvermessung angeordnet, um damit den Anschluss an das entstehende europäische Grad- und Vermessungsnetz herstellen zu können.

Mit der Gesamtleitung dieses Unternehmens hat Georg IV. im Jahr 1820 den Göttinger Professor Gauß beauftragt. Das war für ihn eine riesige Aufgabe, denn es mussten fast 2600 trigonometrische Punkte zum Teil erst eingerichtet und dann vermessen werden, um dann das erhaltene Zahlenmaterial nummerisch auswerten zu können. So arbeitete Gauß einige Jahre ganz praktisch im Gelände mit und erfand zur Erleichterung der Arbeit ein geeignetes Instrument, das Heliotrop, erfunden. Zeitweilig gehörte auch sein ältester Sohn Joseph zum Vermessungstrupp. Das größte Dreieck in dem Triangulationsnetz wurde von den Eckpunkten Brocken, Großer Inselsberg und Hoher Hagen bei Göttingen gebildet. Zur Erinnerung an diese und weitere Vermessungsarbeiten wurde vor zehn Jahren, am 17. Juni 1995, auf dem Großen Inselsberg ein Gedenkstein enthüllt.

Trigonometrischer Punkt auf dem Inselsberg mit der Inschrift[2]:

Großer Inselsberg. Trigonometrischer Punkt Erster Ordnung der Landesvermessung.

Seit dem zweiten Jahrzehnt des 19. Jahrhunderts wurde der Große Inselsberg wegen seiner exponierten Lage im mitteldeutschen Raum für vermessungstechnische Grossaufgaben genutzt: für die Hannoversche Gradmessung, die Landesvermessung des Königreiches Preussen, des Kurfürstentums Hessen, der Herzogtümer Sachsen-Coburg-Gotha und Sachsen-Meiningen, der Herrschaft Schmalkalden und für die Mitteleuropäische Gradmessung. Mit diesen Arbeiten sind solche hervorragenden Persönlichkeiten wie Carl Friedrich Gauss, Christian Ludwig Gerling und Peter Andreas Hansen verknüpft.

Deutscher Verein für Vermessungswesen, Landesverein Thüringen. Bund der Öffentlich bestellten Vermessungsingenieure, Landesgruppe Thüringen. Im Juni 1995.

Auch die Gestaltung der letzten deutschen 10-DM-Banknote war Gauß und seinen geodätischen Leistungen gewidmet.
Die Vorderseite zeigt Carl Friedrich Gauß, der Hintergrund das Gebäude des historischen Göttingen und eine Funktion, deren Graph links des Porträts dargestellt ist. Diese wird als Gaußsche Normalverteilung bezeichnet.
Auf der Rückseite ist ein Sextant (Heliotrop) abgebildet, wie ihn Gauß für Vermessungszwecke benutzt hat. Daneben ist eine Dreieckskette abgedruckt. Diese Dreiecksketten bilden in ihrer Gesamtheit das Gerüst eines Netzes topographischer Punkte 1. Ordnung. Sowohl Heliotrop als auch Dreieckskette weisen auf die Beteiligung von C. F. Gauß bei den Vermessungsarbeiten des Königreichs Hannover hin.

Seit dem Beginn der 20er Jahre waren diese Arbeiten aber auch sehr eng mit seinen geometrischen Interessen verbunden. Schon während seiner Studienzeit hat Gauß sehr ernsthaft über die Grundlagen der Geometrie nachgedacht. Im vorliegenden praktischen Fall ging es ihm nun darum, die

[2] Bild-Quelle: http://lexikon.freenet.de/Bild:Inselsberg_Trig.jpg
[2] Bild-Quelle: http://www.didaktik.mathematik.uni-wuerzburg.de/history/ausstell/gauss/geldschein.html

Abbildung der gekrümmten Erdoberfläche auf ein ebenes Kartenblatt mit einer geeigneten geometrischen Theorie zu fundieren. 1827 erschien sein Werk „Disquisitiones generales circa superficies curvas“ (Allgemeine Untersuchungen über gekrümmte Flächen). Diese Flächentheorie von Gauß begründete die Differentialgeometrie als selbstständiges mathematisches Gebiet.

1.5 Physik

Im Jahr 1828 nahm Gauß als Gast von Alexander von Humboldt (1769–1859) an der 7. Versammlung deutscher Naturforscher und Ärzte in Berlin teil. Humboldt, der in wissenschaftlichen Fragen am preußischen Hofe großen Einfluss hatte, wollte den Gelehrten an die 1810 gegründete Universität Berlin, die heutige Humboldt-Universität, holen. Das gelang ihm nicht. Er verstand es jedoch, Gauß für ein damals sehr aktuelles Forschungsgebiet, den Erdmagnetismus, zu interessieren. Gauß widmete sich auch sofort mit der ihm eigenen theoretischen Tiefe dem neuen Arbeitsfeld.

Zusammen mit dem 1831 von Halle nach Göttingen berufenen Physiker Wilhelm Weber (1804–1891) entwickelte er 1832 das absolute physikalische Maßsystem, in dem die magnetischen wie auch die elektrischen Größen auf die mechanischen Größen Länge, Zeit und Masse zurückgeführt werden. Vom Jahrgang 1836/37 an wurde von Gauß und Weber die Heftreihe „Resultate aus den Beobachtungen des erdmagnetischen Vereins“ herausgegeben. Diese Reihe enthielt u. a. 1838/39 die „Gaußsche Allgemeine Theorie des Erdmagnetismus“. Gauß gelangte durch Berechnungen zur Angabe der ungefähren Lage der magnetischen Pole der Erde. Schiffsexpeditionen bestätigten die Rechnungen wenig später. Heute noch widmet sich das deutsche Forschungsschiff „Gauß“ vielfältigen wissenschaftlichen Aufgaben.

Im Jahr 1831 entdeckte Michael Faraday (1791–1867) in England die elektromagnetische Induktion. Bereits 1833/34 installierten Gauß und Weber den ersten elektromagnetischen Telegraphen. Dazu wurde über die Dächer von Göttingen hinweg eine doppelte Drahtverbindung vom Physikalischen Kabinett in der Innenstadt zu der außerhalb der Stadtmauern liegenden Sternwarte gezogen, eine Strecke von beinahe zwei Kilometern, über die sich in beide Richtungen kräftige Stromstöße übertragen ließen. Die Anlage war zwölf Jahre lang in Betrieb, bis sie 1845 durch einen Blitzschlag zerstört wurde.

Gauß erkannte sofort auch die bedeutenden möglichen Auswirkungen des Telegraphen auf das sich rasch entwickelnde Eisenbahnwesen. 1835 wurde die erste deutsche Strecke zwischen Nürnberg und Fürth in Betrieb genommen. Längs dieser Linie legte der Münchener Professor Carl August Steinheil (1801 - 1870), der auch bei Gauß studiert hatte, eine Telegraphenverbindung an, zu deren technischer Verbesserung Gauß beitragen konnte. Das Interesse des Gelehrten am Eisenbahnbau wurde außerdem dadurch gefördert, dass sein ältester Sohn nach 1846 in leitender Stellung beim Bau der Hannoverschen Eisenbahnlinien tätig war. An der Einweihung der Linie von Kassel nach Göttingen am 31. Juli 1854 nahm Gauß noch persönlich teil.

1.6 Ehrungen

In seinen letzten Lebensjahren hatte Gauß noch zwei weitere Schüler, die seine mathematischen Arbeiten fortsetzen konnten und damit ganz wesentlich zum Fortschritt der Mathematik im 19. Jahrhundert beigetragen haben. Richard Dedekind (1831–1916), der 1852 bei Gauß promovierte, trug mit seiner Theorie der Irrationalzahlen zum strengen Aufbau des Zahlensystems bei. 1888 erschien seine Schrift „Was sind und was sollen die Zahlen?“, die bis heute viele Auflagen erreicht hat. Bernhard Riemann (1826–1866), der 1851 bei Gauß mit einer wegweisenden Arbeit zur Grundlegung der Funktionentheorie promoviert hat, konnte mit seinem im Juni 1854 in Göttingen gehaltenen Habilitationsvortrag „Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen“ wesentlich zum systematischen Aufbau der nichteuklidischen Geometrie beitragen. Riemann gab damit wichtige Anregungen zur Darstellung des Zusammenhangs von Raumstruktur und physikalischen Gesetzmäßigkeiten, die dann schließlich bei Albert Einstein (1879–1955) in die Grundlagen der Speziellen und der Allgemeinen Relativitätstheorie einmündeten.

Die Leistungen von Gauß wurden weltweit gewürdigt. Die Royal Society in London ehrte ihn 1838 mit der Copley-Medaille. Die russische Universität im Kasan ernannte ihn zum Ehrenmitglied. Die Städte Braunschweig und Göttingen verliehen ihm die Ehrenbürgerschaft. Er trug den Titel eines Geheimen Hofrates.

Am 17. März 1796 hatte Gauß als junger Student begonnen, ein wissenschaftliches Tagebuch in lateinischer Sprache zu führen, das man erst am Ende des 19. Jahrhunderts wiederfand. Es gewährte interessante Einsichten in sein gesamtes wissenschaftliches Denken und Arbeiten. Darunter waren auch Entdeckungen, die Gauß selbst nicht publiziert hat, getreu seinem Wahlspruch „Pauca, sed matura“ (Weniges, aber Ausgereiftes). Teile des Tagebuches wurden später veröffentlicht. Das Gesamtwerk von Gauß in zwölf Bänden wurde in den Jahren von 1863 bis 1933 von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen herausgegeben. Auch einige Briefwechsel, z. B. der mit Alexander von Humboldt, mit Friedrich Wilhelm Bessel und mit Wolfgang von Bolyai sind in gedruckter Form erschienen.

Der König von Hannover ließ noch im Todesjahr 1855 eine Gedenkmedaille auf Gauß prägen, auf der er als „Mathematicorum princeps“ (Fürst der Mathematiker) bezeichnet wird.

2 Gauß als Namensgeber

Nach Carl Friedrich Gauß sind Methoden, Verfahren oder Ideen benannt worden, denen man in der Schule, im Studium oder in Anwendungen begegnet, wobei einige auch auf Weiterentwicklungen beruhen. Die nachfolgende unvollständige Zusammenstellung dokumentiert seine Leistungen nachhaltig:

- das Gaußsche Eliminationsverfahren zur Lösung von linearen Gleichungssystemen,
- der Gauß-Jordan-Algorithmus, eine Weiterentwicklung des Gaußschen Eliminationsverfahren,
- das Gauß-Newton-Verfahren, ein Verfahren zur Lösung nichtlinearer Gleichungen,
- das Gauß-Seidel-Verfahren, ein Verfahren zur Lösung von linearen Gleichungssystemen,
- das Gaußsche Fehlerfortpflanzungsgesetz,
- das Gaußsche Fehlerintegral,
- der Gaußsche Integralsatz in der Vektoranalysis, auch als Satz von Gauß-Ostrogradski oder Divergenzsatz bezeichnet,
- die Gaußsche Krümmung in der Differentialgeometrie,
- der Satz von Gauß-Bonnet in der Differentialgeometrie,
- die Gaußsche Osterformel zur Berechnung des Osterdatums,
- das Gaußsche Prinzip des kleinsten Zwanges in der Mechanik,
- die Gaußsche Methode der kleinsten Quadrate,
- die Gaußsche Quadraturformeln, ein numerisches Integrations-Verfahren,
- die Gaußsche Normalverteilung, auch Gaußsche Glockenkurve genannt,
- die Gaußschen Zahlen, eine Erweiterung der ganzen Zahlen ins Komplexe,
- die Gaußsche Zahlenebene als geometrische Darstellung der Menge der komplexen Zahlen,

- die Gaußklammer, eine Funktion, die eine Zahl auf die nächstkleinere ganze Zahl abrundet (Beispiele: $[3,2] = 3$, $[-3,2] = -4$),
- das Gauß-Geschütz, ein Geschütz, das ein ferromagnetisches Projektil mittels (Elektro-)-Magneten beschleunigt, ähnlich einem Linearmotor,
- der Gauß-Prozess, ein stochastischer Prozess das Gauß-Markov-Theorem über die Existenz eines BLUE-Schätzers in linearen Modellen,
- das Gauß-Krüger-Koordinatensystem.

3 Konstruktion regelmäßiger n-Ecke

Um Gauß anlässlich des 200. Geburtstags (30. April 1977) zu ehren, wurde eine Briefmarke[3] herausgegeben. Sie stellt den Mathematiker als junger Mann dar. Abgebildet sind ferner ein regelmäßiges 17-Eck, ein Zirkel und ein Lineal (Zeichendreieck).

Heute besteht das Logo des Mathematik-Olympiaden e. V. aus diesen Bausteinen. Eine ausführliche Konstruktionsbeschreibung findet man unter

`www.mathematik-olympiaden.de/17Eck.pdf`,

eine darauf basierende verkürzte unter

`www.matheolympiade-thueringen.de/olympiade/daslogo.html`.

Zu bemerken ist, dass der Ausdruck

$$\cos\left(\frac{360^\circ}{17}\right) = -\frac{1}{16} + \sqrt{17} + \frac{1}{16}\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} + \frac{1}{8}\sqrt{17 + 3\sqrt{17} - \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} - 2\sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}$$

mit Zirkel und Lineal zu konstruieren ist. Dies ist auch unter mehrfacher Anwendung des Satzes von Pythagoras möglich. So ist z. B. $\sqrt{17}$ als Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks mit den Katheten 4 und 1 konstruierbar. Natürlich kann man die Wurzel eines Ausdrucks auch unter Ausnutzung des Katheten- oder Höhensatzes erhalten. Theoretische Informationen über die Konstruktionen mit Zirkel und Lineal werden z. B. unter

`http://www.mathematik.uni-osnabrueck.de/script/zirkelundlineal/node2.html`

gegeben.

Mit Schülerinnen und Schüler kann man die Frage diskutieren, welche regelmäßigen n-Ecke sich mit Zirkel und Lineal konstruieren lassen. Dies gelingt beim Dreieck, Viereck (Quadrat) und Fünfeck. Die Konstruktionen beruhen darauf, wie man die zugehörigen Innenwinkel von 60°, 90° und 108° konstruiert. Äquivalent dazu ist die Konstruktion der zugehörigen Mittelpunktswinkel 120°, 90° und $> 72^\circ$. Eine Konstruktionsbeschreibung für ein regelmäßiges Fünfeck wird unter

`http://mathworld.wolfram.com/Pentagon.html`

[3]Bild-Quelle: `http://members.tripod.com/jeff560/gauss3.jpg`

und eine weitere unter

`http://delphi.zsg-rottenburg.de/mathe.html`

gegeben.

Aus Dreieck, Viereck und Fünfeck gewinnt man die Konstruierbarkeit einer Vielzahl anderer n-Ecke. Indem man die Mittelpunktswinkel von Dreieck und Fünfeck überlagert, erhält man ihre Differenz mit 48°, durch Halbierung dieses Winkels 24° und auf diese Weise ein 15-Eck mit einem Innenwinkel von 156°. Durch (wiederholte) Halbierung der Mittelpunktswinkel lassen sich (und dies ist schon seit der Antike bekannt) regelmäßige n-Ecke für

$$n = 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 20, 24 \text{ usw.}$$

konstruieren. In dieser Aufzählung fehlen wichtige Fälle wie $n = 7, 9, 11$ usw.

Gauß bewies 1796:

> *Ist n eine „Fermatsche Zahl", d. h. von der Form $n = 2^{2^k} + 1$, wobei k eine natürliche Zahl und n eine Primzahl ist, so lässt sich ein regelmäßiges n-Eck mit Zirkel und Lineal konstruieren.*

Gauß war also der Erste, der die Möglichkeit einer solchen Konstruktion für $n = 17,\ 257$ und 65537 (alles Fermatsche Primzahlen) nachweisen konnte. Man kennt im Übrigen auch konkrete Konstruktionsvorschriften für diese n-Ecke, die mit wachsendem n aufwändiger werden. Wie dies für $n = 65537$ zu bewerkstelligen ist, kann man bei J. Hermes[4] nachlesen. Tatsächlich soll J. Hermes die Konstruktion auch vollbracht haben, wozu er anscheinend 10 Jahre brauchte. In der Institutsbibliothek des Mathematischen Instituts der Universität Göttingen soll es einen Koffer von J. Hermes mit den Zeichnungen zu obiger Arbeit geben.

Analog zum 15-Eck gilt, dass man durch Multiplikation verschiedener Fermatscher Primzahlen weitere Konstruktionen mit Zirkel und Lineal erhält, also z. B. für $n = 51$ $(= 3 \cdot 17)$ oder für $n = 255$ $(= 3 \cdot 5 \cdot 17)$. Denn man weiß aus der Zahlentheorie, dass es für zwei teilerfremde natürliche Zahlen n_1, n_2 immer ganzzahlige Faktoren a_1 und a_2 gibt mit $a_1 n_1 + a_2 n_2 = 1$, woraus $\frac{a_2}{n_1} + \frac{a_1}{n_2} = \frac{1}{n_1 n_2}$ folgt. Kann man also das n_1-Eck und das n_2-Eck konstruieren, so erhält man auf diese Weise mit Hilfe der Mittelpunktswinkel das $(n_1 \cdot n_2)$-Eck. Will man etwa das 51-Eck konstruieren ($n_1 = 3,\ n_2 = 17$), so sind $a_1 = 6,\ a_2 = -1$, also bildet man die Differenz des 6-fachen Mittelpunktswinkels des 17-Ecks und des Mittelpunktswinkels des Dreiecks: $\left(\frac{6}{17} - \frac{1}{3}\right) 360° = \frac{1}{51} 360°$. Dieses Verfahren lässt sich für mehr als zwei teilerfremde Faktoren fortsetzen, z. B. für $n = 255 = 5 \cdot 51$ $(= 5 \cdot 3 \cdot 17)$.

Weiterhin lassen sich die Mittelpunktswinkel fortgesetzt halbieren, also folgt aus der Konstruierbarkeit des regelmäßigen n-Ecks auch die des regelmäßigen $(2^k \cdot n)$-Ecks.

Pierre Laurent Wantzel bewies 1836, dass auch die Umkehrung der Gaußschen Entdeckung gilt. Er zeigte: Aus der Konstruierbarkeit des regelmäßigen n-Ecks folgt, dass die Primfaktorzerlegung von n nur eine Potenz von 2 und verschiedene Fermatsche Primzahlen enthält.

Es gilt also:

> *Ein regelmäßiges n-Eck lässt sich genau dann mit Zirkel und Lineal konstruieren, wenn sich n als $n = 2^k \cdot p_1 \cdot \ldots \cdot p_m$ mit verschiedenen Fermatschen Primzahlen p_i darstellen lässt.*

Damit ist aber die Frage immer noch nicht abschließend gelöst, denn man weiß bis heute nicht, ob die Anzahl der Fermatschen Primzahlen endlich ist. Es ist nicht einmal bekannt, ob es über die

[4] Siehe `http://de.wikipedia.org/wiki/65537-Eck`.

fünfte Fermatsche Primzahl

$$2^{2^4} + 1 = 65537$$

hinaus weitere Fermatsche Primzahlen gibt. Die nächsten 28 folgenden Fermatschen Zahlen

$$2^{2^k} + 1 \text{ für } k = 5, 6, 7, \ldots, 32$$

sind als zusammengesetzt nachgewiesen worden. Der Fall $k = 33$ scheint ungeklärt zu sein. Von insgesamt 218 Fermatschen Zahlen weiß man, dass sie zusammengesetzt sind (siehe auch `http://de.wikipedia.org/wiki/Fermat-Zahl`). Ein Überblick über alle n-Ecke, die mit Zirkel und Lineal konstruierbar sind, wird in [9] gegeben.

4 Literatur

Literatur

[1] Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen (Hrsg.): Gauß, C. F. Werke. 12 Bände, Göttingen. 1863–1933.

[2] Gauß, C. F.: Mathematisches Tagebuch 1796–1814. In : Ostwalds Klassiker, Bd. 256 Leipzig 1985.

[3] Wußing, H.: Vorlesungen zur Geschichte der Mathematik. Berlin 1979.

[4] Wußing, H.: Carl Friedrich Gauß. Leipzig 1989.

[5] Du Sautoy, M.: Die Musik der Primzahlen. Auf den Spuren des größten Rätsels der Mathematik. München 2004.

[6] Zeitschrift für Vermessungswesen 120 (1995) 9, S. VII.

[7] Marwinski, T.: Zur Geschichte der Astronomie in Thüringen und Mitteilungen über Astronomen, die aus Thüringen stammen. Weimar 1992, Selbstverlag des Verfassers (überarbeitete Fassung eines am ThILLM Arnstadt gehaltenen Vortrags).

[8] Hermes, J.: Über die Teilung des Kreises in 65537 gleiche Teile. Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Math.-Phys. Klasse, Bd. 1894, Heft 3, S. 170–186.

[9] Fuchs, H.: C. F. Gauss und die regelmäßigen n-Ecke. Monoid 25 (2005) 82, S. 10–11.

Attribution Section

moldenhauer (2006-01-04):
Text für KoSemNet freigegeben. Der Text wurde zuerst 2005 als Manuskriptdruck herausgegeben vom Thüringer Institut für Lehrerfortbildung, Lehrplanentwicklung und Medien (Thillm)

graebe (2006-05-02): Umsetzung in LaTeX für das KoSemNet-Projekt