Wo steckt der Fehler?

Helmut König, Chemnitz

4. Februar 2005

Wenn man im außerunterrichtlichen Bereich bei den Schülern die Fähigkeit zum problemlösenden Denken entwickeln will, dann sollte man nicht vergessen, bisweilen auch nach Fehlern in vorgelegten Lösungen suchen zu lassen. Ein hierfür gut geeignetes Beispiel soll hier vorgestellt werden.

Die Aufgabenstellung

Wir betrachten ein Rechteck $ABCD$, dessen Seite $\overline{AB}$ halb so lang ist wie die Seite $\overline{BC}$ und bei dem M der Mittelpunkt von $\overline{BC}$ ist. Die Strecke $\overline{MA}$ schneide die Diagonale $\overline{BD}$ im Punkt P und Q sei der Fußpunkt des Lots von P auf $\overline{BC}$. Die Strecke $\overline{MD}$ schneide die Diagonale $\overline{AC}$ im Punkt S und R sei der Fußpunkt des Lots von S auf $\overline{BC}$.

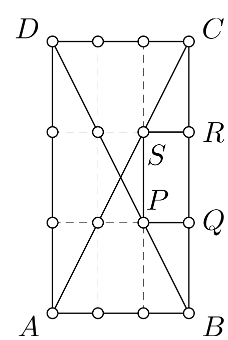
Weise nach, dass unter diesen Voraussetzungen $PQRS$ ein Rechteck ist, dessen Seite $\overline{PQ}$ halb so lang ist wie die Seite $\overline{QR}$ und dessen Flächeninhalt gleich dem neunten Teil des Flächeninhalts von $ABCD$ ist!

Auftrag an Schüler

Beweise den ersten Teil der Behauptung!

Prüfe nach, ob die folgenden drei Beweise des zweiten Teils der Behauptung korrekt sind! Wenn dies nicht der Fall ist, dann gib an, wo der Fehler steckt!

1. Beweis: Man teile die Seiten von $ABCD$ jeweils in drei gleiche Teile. Die in der Abbildung eingezeichneten Verbindungsstrecken sind dann zu einer der beiden Seiten parallel und zerlegen $ABCD$ in neun Rechtecke, die offensichtlich kongruent und daher auch inhaltsgleich sind und deren Seitenlängen sich wie 1 : 2 verhalten. Das rechts neben dem zentralen Teilrechteck liegende Rechteck ist unser Rechteck $PQRS$. Hieraus folgt unmittelbar die Behauptung.



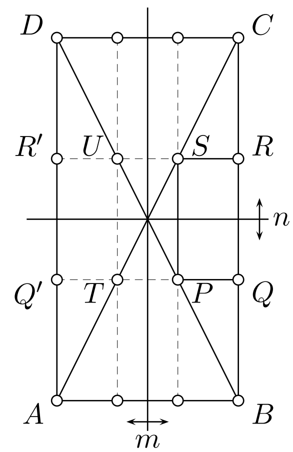
2. Beweis: Die Verlängerung von $\overline{QP}$ über P hinaus schneide $\overline{AC}$ in T und $\overline{AD}$ in Q'; die Verlängerung von $\overline{RS}$ über S hinaus schneide $\overline{BD}$ in U und $\overline{AD}$ in R'.

Da $PQRS$ ein Rechteck ist, folgt hieraus $Q'Q \parallel R'R$ und $PS \parallel BC$.

Da $ABCD$ ein Rechteck ist, sind seine beiden Mittellinien die beiden Symmetrieachsen m und n dieses Vierecks.

Aus Eigenschaften der Geradenspiegelung folgt, dass bei der Spiegelung an m die Diagonale $\overline{BD}$ das Bild der Diagonalen $\overline{AC}$ ist und dass die Gerade QQ' in sich übergeht. Folglich geht P in T und analog auch S in U über.

Hieraus folgt, dass $TQ'R'U$ das Bild unseres Rechtecks $PQRS$ bei Spiegelung an m ist und dass daher diese beiden Rechtecke kongruent und folglich auch inhaltsgleich sind.



Führt man anschließend noch die Spiegelung an der Symmetrieachse n durch, dann erkennt man, dass dies für alle neun Teilrechtecke zutrifft.

Hieraus folgt unmittelbar, dass alle neun Teilrechtecke und daher auch unser Rechteck $PQRS$ einen Flächeninhalt besitzen, der gleich dem neunten Teil des Flächeninhalts von $ABCD$ ist.

3. Beweis: Seien T und U die im 2. Beweis eingeführten Hilfspunkte. Da $PQRS$ ein Rechteck ist, folgt mithilfe des Nebenwinkelsatzes

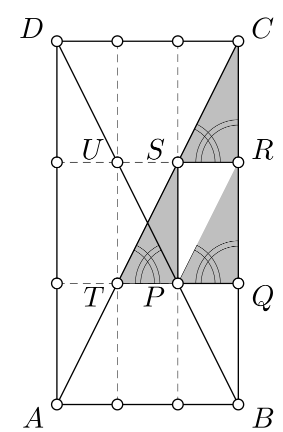
$$|\angle RQP| = |\angle SPT| = |\angle CRS| \, (= 90°). \tag{1}$$

Ferner folgt $PQ \parallel RS$ und mithilfe des Stufenwinkelsatzes $|\angle PTS| = |\angle RSC|$. Wegen $AC \parallel PR$ folgt analog $|\angle PTS| = |\angle QPR|$ und daher

$$|\angle QPR| = |\angle PTS| = |\angle RSC| \, . \tag{2}$$

Da $PQRS$ ein Rechteck ist, gilt auch

$$|QR| = |PS| \text{ und } |PQ| = |SR| \, . \tag{3}$$



Aus (1), (2), (3) folgt mithilfe des Kongruenzsatzes (wsw) die Kongruenz der Dreiecke PQR, TPS und SRC, woraus dann leicht die Kongruenz aller neun Teilrechtecke abgeleitet werden kann. Hieraus folgt dann unmittelbar unsere Behauptung.

Auswertung mit den Schülern

Der 1. Beweis ist unkorrekt.

Hier liegt der grobe Beweisfehler vor, dass bei einem (direkten) Beweis *von der Behauptung ausgegangen* wird.

Dass $ABCD$ in neun kongruente Teilrechtecke zerlegt wird ist ein hinreichendes Teilziel, aus dem die Behauptung unmittelbar folgt und das aus den Voraussetzungen abgeleitet werden muss.

Man könnte auch sagen, dass hier nicht unser Satz sondern eine Umkehrung dieses Satzes bewiesen wurde.

Der 2. Beweis ist unkorrekt.

Hier wird nur bewiesen, dass die vier „Eckrechtecke“ und die vier „Seitenrechtecke“ untereinander kongruent sind. Dass ein „Eckrechteck“, ein „Seitenrechteck“ und das „zentrale Rechteck“ nicht kongruent sein müssen erkennt man, wenn man das „zentrale Rechteck“ ähnlich vergrößert oder verkleinert.

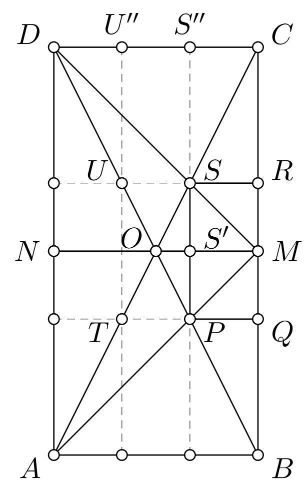
In diesem Fall liegt eine *Beweislücke* vor.

Der 3. Beweis ist unkorrekt.

Die für den Beweis unverzichtbare *Feststellung* $AC \parallel PR$ wurde *der Anschauung entnommen*, aber *nicht aus den Voraussetzungen hergeleitet*. (Dies wäre mit dem Hilfsmittel Ähnlichkeit/Strahlensätze möglich.)

Ein korrekter Beweis unserer Aufgabe

Sei $\overline{MN}$ eine Mittellinie des Rechtecks $ABCD$ und O der auf $\overline{MN}$ liegende Diagonalenschnittpunkt. Sei S' bzw. S'' der Schnittpunkt der Geraden PS mit $\overline{MN}$ bzw. $\overline{CD}$ und U'' der Schnittpunkt von TU mit $\overline{CD}$.



Nach Voraussetzung ist $\overline{AB}$ halb so lang wie $\overline{BC}$. Hieraus folgt, dass $NMCD$ ein Quadrat ist, auf dessen Diagonale $\overline{MD}$ nach Voraussetzung der Punkt S liegt.

Hieraus folgt, dass auch $S'MRS$ ein Quadrat ist und dass $PQRS$ ein Rechteck ist, deren Seite $\overline{PQ}$ halb so lang ist wie die Seite $\overline{QR}$.

Aus den Voraussetzungen folgt $OM \parallel CD$ und $|OM| : |CD| = 1 : 2$. Mithilfe des *Strahlensatzes* folgt hieraus $|S'S| : |SS''| = 1 : 2$, woraus dann $|MR| = |RC| = |QR|$ und hieraus $|BQ| = |QR| = |RC|$ folgt.

Da man zeigen kann (siehe 2. Beweis, Spiegelung an m) dass $PS \parallel TU$ gilt, folgt analog $|CS''| = |S''U''| = |U''D|$. Der Rest ist einfach.

Attribution Section

koenig (2005-01-25): Contributed to KoSemNet