Einige wichtige Ungleichungen

Hans-Gert Gräbe, Leipzig

http://www.informatik.uni-leipzig.de/~graebe

1. Februar 1997

Ziel dieser kurzen Note ist es, einige wichtige Ungleichungen, die in verschiedenen Olympiadeaufgaben immer wieder zur Anwendung kommen, einschließlich ihrer Beweise zusammenzustellen.

1 Die Ungleichung vom arithmetisch-geometrischen Mittel

Gut bekannt dürfte den meisten Schülern mit einigem Olympiadetraining die Ungleichung

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$$

sein, die bekanntlich für alle $a, b > 0$ gilt und leicht aus der Beziehung $(a-b)^2 \geq 0$ hergeleitet werden kann. Diese Herleitung zeigt auch, dass in obiger Ungleichung Gleichheit genau dann gilt, wenn $a = b$ ist.
Eine schon weniger triviale Ungleichung ist die folgende:

Satz 1 *Für alle $a, b, c > 0$ gilt stets die Ungleichung*

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 3.$$

Aufgabe 1 Zeige die Gültigkeit dieser Ungleichung, ohne auf die folgende allgemeine Theorie zurückzugreifen.

Diese beiden Ungleichungen sind Spezialfälle der folgenden allgemeinen Ungleichung

Satz 2 *Sind $x_1, \ldots, x_n$ nichtnegative reelle Zahlen, deren Produkt gleich 1 ist, so gilt für ihre Summe*

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + x_2 + \ldots + x_n \geq n.$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn $x_1 = \ldots = x_n = 1$ ist.

Beweis: (nach [1]) Wir führen den Beweis mit vollständiger Induktion. Für $n = 2$ ist seine Aussage Gegenstand der oben betrachteten Ungleichung. Sei nun die folgende Aussage richtig: Für beliebige k nichtnegative reelle Zahlen $y_1, \ldots, y_k$ gilt

$$y_1 \cdot \ldots \cdot y_k = 1 \quad \Rightarrow \quad y_1 + \ldots + y_k \geq k.$$

Wir betrachten $k+1$ Zahlen $x_1, \ldots, x_{k+1}$ (von denen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen wollen, dass sie der Größe nach geordnet sind), deren Produkt ebenfalls gleich 1 ist und wollen zeigen, dass dann $x_1 + \ldots + x_{k+1} \geq k + 1$ gilt.

Fassen wir die Faktoren x_1 und x_{k+1} zu einem gemeinsamen Faktor $y_1 = x_1 x_{k+1}$ zusammen, so haben wir ein Produkt aus k Faktoren und nach Induktionsvoraussetzung gilt

$$\begin{aligned} k &\leq y_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_k \\ &= x_1 x_{k+1} + x_2 + x_3 + \ldots + x_k \\ &= x_1 + \ldots + x_{k+1} + x_1 x_{k+1} - x_1 - x_{k+1}, \end{aligned}$$

also (wegen $x_1 x_{k+1} - x_1 - x_{k+1} + 1 = (x_1 - 1)(x_{k+1} - 1)$)

$$k + 1 \leq x_1 + \ldots + x_{k+1} + (x_1 - 1)(x_{k+1} - 1)$$

Da x_1 die kleinste und x_{k+1} die größte der $k + 1$ Zahlen ist, ihr Produkt aber gleich 1, so folgt, dass $x_1 \leq 1 \leq x_{k+1}$ sein muss. Damit ist der Korrektursummand in obiger Ungleichung nichtpositiv und es gilt erst recht

$$k + 1 \leq x_1 + \ldots + x_{k+1}.$$

Gleichheit erhalten wir höchstens, wenn $(x_1 - 1)(x_{k+1} - 1) = 0$, also entweder $x_1 = 1$ oder $x_{k+1} = 1$ gilt. Dann ergibt das Produkt der restlichen k Zahlen aber bereits 1 und der zweite Teil der Behauptung folgt ebenfalls aus der Induktionsvoraussetzung. $\square$

Als Folgerung erhalten wir insbesondere die Gültigkeit der Ungleichung

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \ldots + \frac{x_{n-1}}{x_n} + \frac{x_n}{x_1} \geq n$$

für positive reelle Zahlen $x_1, \ldots, x_n$.

Aufgabe 2 Beweise die Ungleichungen

(a) $\dfrac{x^2 + 2}{\sqrt{x^2 + 1}} \geq 2$ **(b)** $\log_a(b) + \log_b(c) + \log_c(a) \geq 3$ **(c)** $\dfrac{x^2}{1 + x^4} \leq \dfrac{1}{2}$

Seien im folgenden $x_1, \ldots, x_n$ stets nichtnegative reelle Zahlen. Als ihr *arithmetisches Mittel* bezeichnet man die Zahl

$$A(x_1, \ldots, x_n) := \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n},$$

als ihr *geometrisches Mittel* die Zahl

$$G(x_1, \ldots, x_n) := \sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n}.$$

Beide Zahlen liegen zwischen der kleinsten und der größten der n Zahlen und fallen mit diesen zusammen, wenn alle n Zahlen gleich sind.

Eine weitere Folgerung aus der oben bewiesenen Ungleichung ist der

Satz 3 (Ungleichung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel)

Es gilt stets

$$A(x_1,\ldots,x_n) \geq G(x_1,\ldots,x_n)$$

und Gleichheit tritt genau dann ein, wenn alle n Zahlen übereinstimmen.

Beweis: Wir betrachten die n reellen Zahlen $\frac{x_1}{G},\ldots,\frac{x_n}{G}$, deren Produkt ganz offensichtlich gleich 1 ist. Die Aussage des Satzes ergibt sich dann durch ein einfaches Umstellen der Ungleichung

$$\frac{x_1}{G}+\ldots+\frac{x_n}{G} \geq n.$$

□

Aufgabe 3 Zeige, dass unter allen Quadern mit gleicher Summe der Kantenlängen der Würfel das größte Volumen hat.

Aufgabe 4 * Zeige, dass unter allen Quadern mit gleicher Oberfläche der Würfel das größte Volumen hat.

2 Andere Mittel zwischen poitiven reellen Zahlen

Es gibt noch weitere Mittel der Zahlen $x_1,\ldots,x_n$, die man betrachten kann. Auch für sie gilt die Aussage, dass sie zwischen der kleinsten und der größten der n Zahlen liegen und mit diesen zusammenfallen, wenn alle n Zahlen gleich sind.

So bezeichnet man für $\alpha \neq 0$ die Zahl

$$M_\alpha(x_1,\ldots,x_n) := \left(\frac{x_1^\alpha+\ldots+x_n^\alpha}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

als *das Mittel vom Grad* α der Zahlen $x_1,\ldots,x_n$. Für $\alpha = 1$ erhalten wir wieder das arithmetische Mittel. Das Mittel vom Grad 2 nennt man das *quadratische Mittel* der genannten Zahlen und das Mittel vom Grad $\alpha = -1$ das harmonische Mittel. Beide spielen in Anwendungen eine wichtige Rolle.

Als Folgerung aus unserem Satz können wir die folgende Beziehung zwischen dem geometrischen Mittel $G(x_1,\ldots,x_n)$ und dem entsprechenden Mittel vom Grad α herleiten:

Satz 4 *Für positive reelle Zahlen $x_1,\ldots,x_n$ gilt*

$$M_\alpha(x_1,\ldots,x_n) \geq G(x_1,\ldots,x_n) \quad \textit{für } \alpha > 0$$

und

$$M_\alpha(x_1,\ldots,x_n) \leq G(x_1,\ldots,x_n) \quad \textit{für } \alpha < 0.$$

Gleichheit gilt in beiden Ungleichungen genau für $x_1 = \ldots = x_n$.

Beweis: Wende den Satz über das arithmetisch-geometrische Mittel auf $x_1^\alpha,\ldots,x_n^\alpha$ an. □

Die bewiesenen Ungleichungen legen es nahe, das geometrische Mittel als das *Mittel vom Grad 0* zu bezeichnen. Eine weitere Folgerung aus diesen beiden Ungleichungen ist in der folgenden Aufgabe zu beweisen:

Aufgabe 5 Zeige, dass für positive reelle Zahlen $x_1, \ldots, x_n$ stets

$$(x_1 + \ldots + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \ldots + \frac{1}{x_n}\right) \geq n^2$$

gilt.

3 Die Bernoullischen Ungleichungen

EIne weitere wichtige Gruppe von Ungleichungen wollen wir nun herleiten.

Satz 5 *Ist $x \geq -1$ und $\alpha > 0$ eine reelle Zahl, so gilt*

$$(1+x)^\alpha \leq 1 + \alpha x \qquad \textit{wenn } 0 < \alpha < 1$$

und

$$(1+x)^\alpha \geq 1 + \alpha x \qquad \textit{wenn } \alpha > 1.$$

In beiden Ungleichungen gilt wieder Gleichheit genau dann, wenn $x = 0$.

Beweis: Für diese Ungleichung wollen wir eine Beweistechnik verwenden, die oft in der Analysis angewendet wird und die wir hier nicht bis ins letzte Detail exakt begründen können. Wir beweisen die erste Ungleichung zuerst für rationale Exponenten $\alpha = \frac{p}{q}$. Wegen $\alpha < 1$ ist dann $p < q$. Es ist

$$(1+x)^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{(1+x)^p \cdot 1^{q-p}},$$

wobei wir den zweiten Faktor hinzugefügt haben, um zu verdeutlichen, dass wir die Ungleichung vom arithmetisch-geometrischen Mittel anwenden können, da unter dem Wurzelzeichen genau q Faktoren stehen. Wir erhalten

$$(1+x)^{\frac{p}{q}} \leq \frac{p \cdot (1+x) + (q-p) \cdot 1}{q} = 1 + \frac{p}{q}x,$$

das heißt, die zu beweisende Ungleichung einschließlich der Zusatzaussage über die Gültigkeit des Gleichheitszeichens.

Nun argumentiert man in der Analysis, dass man jede reelle Zahl durch rationale Zahlen beliebig genau approximieren kann. Da sich andererseits alle in der Ungleichung vorkommenden Ausdrücke stetig ändern, bleibt die Ungleichung auch für reelle Zahlen richtig.

Die zweite Ungleichung bekommt man nun aus der ersten, indem man $y = \alpha x$ setzt. □

Aufgabe 6 Führe diesen Teil des Beweises aus.

Diese Gruppe von Ungleichungen nennt man die *Bernoullischen Ungleichungen.*

Damit können wir die Ungleichung vom arithmetisch-geometrischen Mittel in der folgenden Weise verallgemeinern:

Satz 6 *Für positive reelle Zahlen $x_1, \ldots, x_n$ gilt*

$$M_\alpha(x_1, \ldots, x_n) \leq M_\beta(x_1, \ldots, x_n),$$

wenn $\alpha < \beta$ (und Gleichheit gilt genau dann, wenn $x_1 = \ldots = x_n$).

Beweis: Haben α und β unterschiedliches Vorzeichen, so liegt zwischen ihnen das geometrische Mittel. Wir wollen also im Weiteren $\alpha, \beta > 0$ annehmen und überlassen den Beweis im verbleibenden Fall $\alpha, \beta < 0$ dem Leser. Da außerdem mit $\gamma = \frac{\beta}{\alpha}$

$$M_\beta(x_1, \ldots, x_n) = M_\alpha(x_1^\gamma, \ldots, x_n^\gamma)^{\frac{1}{\gamma}}$$

gilt, können wir statt der zu beweisenden Ungleichung auch

$$M_1(x_1^\alpha, \ldots, x_n^\alpha) \le M_\gamma(x_1^\alpha, \ldots, x_n^\alpha)$$

zeigen, d.h. uns auf den Beweis der Tatsache beschränken, dass $M_\gamma \ge M_1$ ist für $\gamma > 1$, d.h. $(y_i := x_i^\alpha)$

$$\left(\frac{y_1 + \ldots + y_n}{n}\right)^\gamma \le \frac{y_1^\gamma + \ldots + y_n^\gamma}{n}$$

gilt oder mit $A = \dfrac{y_1 + \ldots + y_n}{n}$

$$n \le \left(\frac{y_1}{A}\right)^\gamma + \ldots + \left(\frac{y_n}{A}\right)^\gamma .$$

Setzen wir in der rechten Seite $z_i := \frac{y_i}{A} - 1$, so können wir die eben bewiesene Benoullische Ungleichung anwenden:

$$\left(\frac{y_1}{A}\right)^\gamma + \ldots + \left(\frac{y_n}{A}\right)^\gamma = (1 + z_1)^\gamma + \ldots + (1 + z_n)^\gamma \ge (1 + \gamma\, z_1) + \ldots + (1 + \gamma\, z_n) = n,$$

weil ja $z_1 + \ldots + z_n = 0$ ist. Damit haben wir die Aussage des Satzes bewiesen. □

4 Gewichtete Mittel

Eine noch weitergehende Verallgemeinerung stellt die Betrachtung gewichteter Summen dar, in die die einzelnen Zahlen nicht wie bisher gleichberechtigt, sondern mit unterschiedlichen Gewichten eingehen. Dafür betrachten wir positive reelle Zahlen $w_1, \ldots, w_n$, die *Gewichte*, und definieren

$$M_\alpha^{(\mathbf{w})} := \left(\frac{w_1\, x_1^\alpha + \ldots + w_n\, x_n^\alpha}{w_1 + \ldots + w_n}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

als das *mit* ($\mathbf{w}$) *gewichtete Mittel vom Grad* α der positiven reellen Zahlen $x_1, \ldots, x_n$. Sind die Gewichte wieder sämtlich rational, wobei wir oBdA einen gemeinsamen Hauptnenneer voraussetzen können, so ist leicht einzusehen, dass alle bisher bewiesenen Ungleichungen über Mittel auch in dieser Verallgemeinerung richtig bleiben. Für reelle Zahlen als Gewichte können wir denselben Grenzübergangsprozess heranziehen wie bereits im Beweis der Bernoullischen Ungleichungen.

Literatur

[1] P.P.Korowkin: Ungleichungen. Dt. Verlag der Wissenschaften, Berlin 1970, Math. Schülerbücherei, Band 9.

Attribution Section

graebe (2004-09-03): Contributed to KoSemNet
graebe (2005-02-02): Revision
graebe (2016-06-27): Small bug fix