Rekursive Folgen (Supplement)

Hans-Gert Gräbe, Leipzig

14. Februar 2024

Ergänzungen zu [1].

1 Rekursive Folgen

In [1] werden Aufgaben vorgestellt, die auf die Arbeit mit rekursiven Folgen zurückgeführt werden können und insbesondere die Theorie der *homogenen linearen Rekursionen mit konstanten Koeffizienten* (HLR) genauer besprochen. Dies sind Rekursionen der Form

$$a_{n+k} = c_1 a_{n+k-1} + c_2 a_{n+k-2} + \cdots + c_k a_n, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{H}$$

mit konstanten Koeffizienten c_i.

1.1 Rekursive Folgen mit CAS berechnen

Viele Abzählaufgaben lassen sich über Rekursionsbeziehungen lösen.

Aufgabe 1 Es sei a_n die Anzahl der Möglichkeiten, ein Rechteck vom Format $2 \times n$ in Dominosteine vom Format 2×1 zu zerlegen.
Man bestimme a_n.

Lösung: Die Anzahl a_n erfüllt $a_1 = 1, a_2 = 2$ und die Rekursion $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ für $n > 2$, denn am rechten Ende kann entweder ein Dominostein hochkant oder zwei Dominosteine horizontal liegen.

Diese Folge ist im Wesentlichen die *Fibonacci-Folge*. Genauer: Der Index ist gegenüber der Fibonacci-Folge um 1 verschoben.

Bei der Analyse von Folgen ist es oft wichtig, sich einen Überblick über ein Anfangsstück der Folgenglieder zu verschaffen, um angemessene Hypothesen zu formulieren oder andere zu verwerfen. Für derartige Rechnungen kann man Computer-Algebra-Systeme (CAS) oder andere Pakete zum symbolischen Rechnen[1] verwenden, die hinreichend gut programmierbar sind. Rechnungen werden im Weiteren mit dem freien CAS Maxima[2] ausgeführt.

[1] Etwa das Python-Paket *SymPy*, `https://www.sympy.org/en/index.html`

[2] `https://maxima.sourceforge.io/`

Bei der Analyse ist eine Besonderheit rekursiver Funktionen zu beachten, die am gerade betrachteten Beispiel demonstriert werden soll. Anfangsstücke dieser Folge können etwa wie folgt mit MAXIMA berechnet werden:

```
a(n):=if n=1 then 1
  else if n=2 then 2
  else a(n-1)+a(n-2);
makelist(a(n),n,1,10);
```

$$[1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89]$$

Allerdings gibt es bereits Probleme, Werte wie etwa $a(26)$ zu berechnen, da die Berechnung sehr lange dauert. Wir haben hier mehr noch das typische Verhalten exponentiellen Wachstums – in einem Anfangsbereich (hier bis etwa $n = 23$) laufen die Rechnungen sehr schnell ab, in einem sehr kleinen Zwischenbereich (hier etwa für $n = 24..28$) wächst die Rechenzeit rasch an, im Bereich darüber hinaus sind die Rechnungen nicht mehr in sinnvoller Zeit ausführbar.

Dies liegt hier darin begründet, dass bei der Berechnung von $a(n)$ die Berechnung von $a(n-i)$ mehrfach aufgerufen wird und diese Anzahlen mit wachsendem i schnell steigen. Ist z_i die Zahl der Aufrufe von $a(n-i)$ bei der Berechnung von $a(n)$, so ist $z_i = z_{i-1} + z_{i-2}$ mit $z_0 = z_1 = 1$, denn $a(n-i)$ wird genau bei der Berechnung von $a(n-i+1)$ und $a(n-i+2)$ aufgerufen. Die Folge (z_i) (im Wesentlichen wieder die Fibonacci-Zahlen) wächst exponentiell, wie wir später noch sehen werden.

Dieses Problem kann man umgehen, indem die einmal berechneten Funktionswerte zwischengespeichert werden. Im folgenden Code wird in der vierten Zeile der berechnete Wert $a(n)$ in einem Array A an der Stelle $A[n]$ gespeichert (beachte hier, dass die Zuweisung $A[n]$: ... den berechneten Wert auch noch zurückgibt) und in der dritten Zeile vorab geprüft, ob der Wert bereits berechnet wurde. In anderen CAS (etwa MATHEMATICA) kann explizit untersucht werden, ob die Variable $A[n]$ belegt ist, in MAXIMA wird hier mit `integerp` geprüft, ob $A[n]$ mit einer ganzen Zahl belegt ist.

```
a(n):=if n=1 then 1
  else if n=2 then 2
  else if integerp(A[n]) then A[n]
  else A[n]:a(n-1)+a(n-2);
a(200);
```

$$453973694165307953197296969697410619233826$$

Die bessere Rechenzeit wird also mit mehr Speicherplatz erkauft. Alternativ kann man $a(n)$ auch iterativ über eine Schleife berechnen, in der die im Weiteren benötigten Werte aus den vorherigen Berechnungen in Schleifenvariablen zwischengespeichert werden.

```
a(n):=block([a1:1,a2:2,a3],
  for i:1 thru n-1 do (a3:a1+a2, a1:a2, a2:a3),
  a1);
```

1.2 Zwei weitere Beispiele

Oft schränken rekursive Regeln die Möglichkeiten so weit ein, dass sich eine überschaubare Menge von Folgen oder auch nur eine einzige ergibt, die allen Bedingungen genügen.

Aufgabe 2 (MO 591036) Für die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ positiver ganzer Zahlen gilt

(1) $a_m \leq a_n$ für alle m, n mit $0 < m < n$.
(2) $a_m \cdot a_n = a_{m\cdot n}$ für alle m, n mit $0 < m \leq n$ sowie
(3) $a_{59} = 59$.

Zeigen Sie, dass dann stets $a_n = n$ erfüllt ist.

Lösung: Wäre $a_k = a_n$ für $k < n$, dann wäre wegen (1) $a_k = a_{k+1} = \cdots = a_n$.
Wäre $a_k = a_{k+1}$ für ein k, so wäre $a_k = a_n$ für alle $n \geq k$. Anderenfalls gäbe es ein kleinstes $t > k$ mit $a_t > a_k$. Das führt aber zu folgendem Widerspruch:

$$a_k^2 = a_{t-1}^2 \overset{(2)}{=} a_{t^2-2t+1} \geq a_{t^2-2t} = a_t \cdot a_{t-2} = a_t \cdot a_k$$

und damit $a_t \leq a_k$. Die Folge (a_n) ist also streng monoton wachsend und damit $a_n \geq n$ für alle n.
Weiter ist $a_{1\cdot 59} = a_1 \cdot a_{59}$ und damit $a_1 = 1$. Mit Induktion zeigt man, dass $a_{59^k} = 59^k$ ist. Also muss auch dazwischen $a_n = n$ sein.

Die Thue-Morse-Folge

Aufgabe 3 Die Folge $t_0, t_1, t_2, \ldots$ sei wie folgt definiert: $t_0 = 1$, $t_{2^k+j} = -t_j$ für $0 \leq j \leq 2^k - 1$ und $k = 0, 1, \ldots$.
Man zeige, dass die Folge nicht periodisch ist.

Lösung: Für ein k ergibt sich t_j für alle $j \in \{2^k, \ldots, 2^{k+1}-1\}$ durch Negation der bisher berechneten Folgenglieder t_j mit $j \in \{0, 2^k - 1\}$:

$k = 0$	1, -1
$k = 1$	1, -1, -1, 1
$k = 2$	1, -1, -1, 1, -1, 1, 1, -1
$k = 3$	1, -1, -1, 1, -1, 1, 1, -1, -1, 1, 1, -1, 1, -1, -1, 1

Wir sehen, dass insbesondere das Vorzeichen des letzten Elements in jeder der obigen Teilfolgen alterniert, d.h., dass $t_{2^m-1} = (-1)^m$ für $m \geq 0$ gilt. Dies ergibt sich in der Tat daraus, dass $2^m - 1 = 2^{m-1} + j$ mit $j = 2^{m-1} - 1$ ist und folglich nach der Bildungsvorschrift $t_{2^m-1} = -t_{2^{m-1}-1}$ gilt.
Wäre nun die Folge periodisch, dann gäbe es Zahlen $l, p > 0$, so dass $t_k = t_{k+p}$ für alle $k \geq l$ gilt. Für alle m mit $2^m > l, p$ gilt dann $t_{2^m-1} = t_{2^m+(p-1)} = -t_{p-1}$ und damit $t_{2^m-1} = t_{2^{m+1}-1} = -t_{p-1}$. Dies widerspricht der gerade gezeigten Eigenschaft.
Es handelt sich um eine Variante der *Thue-Morse-Folge*, eine Folge mit vielen spannenden Eigenschaften. So gilt zum Beispiel

(1) $t_n = (-1)^{v(n)}$, wobei $v(n)$ die Anzahl der Einsen in der Binärdarstellung von n ist.
(2) $t_{2n} = t_n, t_{2n+1} = -t_n$.
(3) Die Folge ist selbstähnlich: Streicht man alle Folgenglieder mit ungeradem Index, so erhält man die Ausgangsfolge zurück.
(4) Ist $X_k = \{0 \le n < 2^{k+1} \ : \ t_n = 1\}$ und $Y_k = \{0 \le n < 2^{k+1} \ : \ t_n = -1\}$, so gilt

$$\sum_{n \in X_k} f(n) = \sum_{n \in Y_k} f(n)$$

für jedes Polynom vom Grad $\le k$.
Für $k = 2$ gilt insbesondere $0+3+5+6 = 1+2+4+7 (= 14)$ und $0^2+3^2+5^2+6^2 = 1^2+2^2+4^2+7^2 (= 70)$.

(1) folgt unmittelbar daraus, dass dies für ein Anfangsstück $0 \le j < 2^k$ gilt und $t_{2^k+j} = -t_j$ ist für $j < 2^k$. Die Binärdarstellungen der beiden Teile unterscheiden sich nur dadurch, dass im Stück ab 2^k das k-te Bit gleich 1 ist.

(2) ergibt sich unmittelbar daraus, denn $2n$ entsteht durch Anhängen einer Null an die Binärdarstellung von n, $2n+1$ durch das Anhängen einer Eins.

(3) folgt unmittelbar aus $t_{2n} = t_n$.

(4) kann mit Induktion nach k gezeigt werden. Es ist nach der Konstruktionsvorschrift

$$X_{k+1} = X_k \cup \left\{2^{k+1} + n \ : \ n \in Y_k\right\} \text{ und } Y_{k+1} = Y_k \cup \left\{2^{k+1} + n \ : \ n \in X_k\right\}.$$

Ist $f(x)$ ein Polynom vom Grad $\le k+1$, so ist $h(x) = f\left(x + 2^{k+1}\right) - f(x)$ als Differenz von $f(x)$ und einem Shift dieses Polynoms ein Polynom vom Grad $\le k$. Es gilt deshalb nach Induktionsvoraussetzung

$$\sum_{n \in X_k} h(n) = \sum_{n \in Y_k} h(n)$$

und damit auch

$$\begin{aligned} \sum_{n \in X_k} f\left(2^{k+1} + n\right) - \sum_{n \in X_k} f(n) &= \sum_{n \in Y_k} f\left(2^{k+1} + n\right) - \sum_{n \in Y_k} f(n) \\ \sum_{n \in Y_k} f(n) + \sum_{n \in X_k} f\left(2^{k+1} + n\right) &= \sum_{n \in X_k} f(n) + \sum_{n \in Y_k} f\left(2^{k+1} + n\right) \\ \sum_{n \in Y_{k+1}} f(n) &= \sum_{n \in X_{k+1}} f(n). \end{aligned}$$

Die *Thue-Morse-Folge* ist als Folge A010060[3] in der *Online Encyclopedia of Integer Sequences* (OEIS) zu finden. Mehr zu dieser Folge auch unter

- `https://de.wikipedia.org/wiki/Morse-Folge`
- `https://de.wikibrief.org/wiki/Thue-Morse_sequence`
- `https://mathworld.wolfram.com/Thue-MorseSequence.html`
- `https://sites.math.washington.edu/~morrow/336_12/papers/christopher.pdf`.

[3] `https://oeis.org/A010060`

2 Lösung der allgemeinen homogenen linearen Rekursion (H)

Es wird nun die in [1] genauer ausgeführte Theorie des Lösens von homogenen linearen Rekursionen (H) kurz rekapituliert. Beim Lösen spielt das *charakteristische Polynom*

$$p(x) = x^k - c_1 x^{k-1} - c_2 x^{k-2} - \cdots - c_k$$

eine wichtige Rolle. Es ist ein Polynom vom Grad k, das nach dem Fundamentalsatz der Algebra genau k komplexe Nullstellen (gezählt mit ihrer Vielfachheit) $q_1, q_2, \cdots, q_k$ besitzt.

Im einfachsten Fall sind diese k Nullstellen alle voneinander verschieden. Dann erfüllen die k voneinander verschiedenen geometrischen Folgen

$$(q_1^n),\ (q_2^n), \ldots, (q_k^n)$$

alle die Rekursion (H). Damit ist dann auch die Folge

$$x_n = A_1 q_1^n + A_2 q_2^n + \cdots + A_k q_k^n, n \geq 0, \tag{1}$$

mit beliebigen Koeffizienten $A_1, \ldots, A_k$ eine Lösung der Rekursion.

Umgekehrt zeigt sich, dass für jede rekursive Folge (x_n), die (H) genügt, eine solche Darstellung (1) existiert. Das Bestimmen der Koeffizienten $A_1, \ldots, A_k$ führt dabei auf ein lineares Gleichungssystem mit den Folgenwerten $x_0, \ldots, x_{k-1}$ als rechten Seiten, das in diesem Fall stets eindeutig lösbar ist.

Hat $p(x)$ Mehrfachnullstellen und ist

$$p(x) = (x - q_1)^{m_1} \cdot \ldots \cdot (x - q_s)^{m_s}$$

die Zerlegung von $p(x)$ in Linearfaktoren, so bilden die k Folgen

$$\left(n^i q_j^n\right), i = 0, \ldots, m_j - 1, j = 1, \ldots, s$$

eine Basis des Lösungsraums von (H), d.h. für jede Folge (x_n), die (H) genügt, gibt es (eindeutig bestimmte) Polynome $A_1(n)$ vom Grad $m_1 - 1$, $A_2(n)$ vom Grad $m_2 - 1$, …, $A_s(n)$ vom Grad $m_s - 1$ mit

$$a_n = A_1(n) q_1^n + A_2(n) q_2^n + \cdots + A_s(n) q_s^n.$$

Ein genauer Beweis dieser Zusammenhänge erfordert fortgeschrittenere Methoden der linearen Algebra sowie der Theorie der Polynome und ist deshalb auch in [1] nur skizziert.

Um Beweise in Olympiadeaufgaben vollständig zu führen, kann man aber eine nach diesen Regeln gefundene explizite Darstellung durch (verallgemeinerte) vollständige Induktion beweisen. Dazu zeigt man als Induktionsanfang, dass die Beziehung für die ersten k Werte gilt und schließt weiter im Induktionsschritt von der Gültigkeit der Formel für alle $k < n$ auf die Gültigkeit der Formel für n.

Beispiele:

(1) Die Fibonacci-Folge $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$, $a_1 = a_2 = 1$ hat das charakteristische Polynom $p(x) = x^2 - x - 1$ mit den beiden rellen Nullstellen $q_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5}$. Die allgemeine Lösung lautet also

$$a_n = A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + B\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Beachtet man $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, so hat man

$$0 = A + B, \quad 1 = \frac{1}{2}(A+B) + \frac{\sqrt{5}}{2}(A-B).$$

Dies liefert $A = -B = \frac{1}{\sqrt{5}}$, also

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right).$$

Diese Formel wird auch als *Formel von Binet* bezeichnet.

(2) $a_n = 4a_{n-1} - 3a_{n-2}$ für $n \geq 2$ und $a_0 = 1, a_1 = 2$.
Das charakteristische Polynom ist $p(x) = x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$, was auf den Ansatz $a_n = A \cdot 1^n + B \cdot 3^n$ führt. Aus den Gleichungen $a_0 = 1 = A + B$ und $a_1 = 2 = A + 3B$ bestimmt man $A = B = \frac{1}{2}$, was zur expliziten Formel

$$a_n = \frac{1}{2} \cdot (3^n + 1)$$

führt.

(3) $a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2}$ für $n \geq 2$ und $a_0 = 4, a_1 = 3$.
Das charakteristische Polynom ist $p(x) = x^2 - x - 6 = (x-3)(x+2)$, was auf den Ansatz $a_n = A \cdot 3^n + B \cdot (-2)^n$ führt. Aus den Gleichungen $a_0 = 4 = A + B$ und $a_1 = 3 = 3A - 2B$ bestimmt man $A = \frac{11}{5}$ und $B = \frac{9}{5}$, was zur expliziten Formel

$$a_n = \frac{11}{5} \cdot 3^n + \frac{9}{5} \cdot (-2)^n$$

führt.

(4) $a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2}$ für $n \geq 2$ und $a_0 = 2, a_1 = 5$.
Das charakteristische Polynom ist $p(x) = x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$, was auf den Ansatz $a_n = (A + B \cdot n) \cdot 3^n$ führt. Aus den Gleichungen $a_0 = 2 = A$ und $a_1 = 5 = 3(A+B)$ bestimmt man $A = 2, B = -\frac{1}{3}$, was zur expliziten Formel

$$a_n = \left(2 - \frac{n}{3}\right) \cdot 3^n$$

führt.

(5) $a_n = 2a_{n-1} - 2a_{n-2}$ für $n \geq 2$ und $a_0 = 3, a_1 = 1$.

Das charakteristische Polynom ist $p(x) = x^2 - 2x + 2$, das die (komplexen) Nullstellen $q_1 = 1 + \mathrm{i}$ und $q_2 = 1 - \mathrm{i}$ hat. Dies führt auf den Ansatz $a_n = A \cdot (1 + \mathrm{i})^n + B \cdot (1 - \mathrm{i})^n$. Aus den Gleichungen $a_0 = 3 = A + B$ und $a_1 = 1 = (A + B) + (A - B)\,\mathrm{i}$ bestimmt man nacheinander $(A - B)\,\mathrm{i} = -2$, $A - B = 2\,\mathrm{i}$ und schließlich $A = \frac{3}{2} + \mathrm{i}, B = \frac{3}{2} - \mathrm{i}$, was zur expliziten Formel

$$a_n = \left(\frac{3}{2} + \mathrm{i}\right)(1 + \mathrm{i})^n + \left(\frac{3}{2} - \mathrm{i}\right)(1 - \mathrm{i})^n$$

führt. Da die Folge (a_n) ganzzahlig ist, kürzen sich für jedes konkrete n die entsprechenden Imaginärteile der beiden Summanden gegenseitig weg.

Wir sehen am letzten Beispiel, dass die explizite Formel kompliziert werden kann und für Fragen einer weitergehenden Analyse nicht in jedem Fall brauchbar ist.

Aufgabe 4 (MO 281224) Es ist $x_1 = y_1 = 2023$ sowie $x_n = 2x_{n-1} - 1$, $y_n = 2y_{n-1} - 2^n$ für $n > 1$. Untersuchen Sie für beide Folgen, ob alle Folgenglieder positiv sind.

Lösung: Die erste Folge kann mit $z_n = x_n - 1$ auf die Potenzfolge $z_{n+1} = 2z_n$ zurückgeführt werden. Es ist $z_n = 2^{n-1} z_1$ und damit $x_n = 2^{n-1}(x_1 - 1) + 1$ immer positiv. Wir hätten auch die ersten Glieder mit MAXIMA mit einem variablen Startwert a berechnen können

```
x(n):=if n=1 then a
  else expand(2*x(n-1)-1);
makelist(x(n),n,1,10);
```

$$[a, 2a - 1, 4a - 3, 8a - 7, 16a - 15, 32a - 31, 64a - 63, 128a - 127, 256a - 255, 512a - 511],$$

dann die Formel $x_n = a \cdot 2^{n-1} - 2^{n-1} + 1 = (a - 1) \cdot 2^{n-1} + 1$ vermuten und diese mit vollständiger Induktion beweisen können.

Die zweite Folge scheint ebenfalls schnell zu wachsen, wenn wir die ersten Folgenglieder berechnen. MAXIMA liefert für die ersten Gleider mit einem variablen Startwert a

```
x(n):=if n=1 then a
  else expand(2*x(n-1)-2^n);
makelist(x(n),n,1,8);
```

$$[a, 2a - 4, 4a - 16, 8a - 48, 16a - 128, 32a - 320, 64a - 768, 128a - 1792]$$

Wir vermuten $y_n = a \cdot 2^{n-1} - (n - 1) \cdot 2^n = (a - 2(n - 1)) \cdot 2^{n-1}$, denn es ist

```
makelist((n-1)*2^n,n,1,10);
```

$$[0, 4, 16, 48, 128, 320, 768, 1792, 4096, 9216]$$

Wir können wieder mit Induktion prüfen, dass die Formel korrekt ist:

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= 2y_n - 2^{n+1} = 2(a - 2(n - 1)) \cdot 2^{n-1} - 2^{n+1} \\ &= (a - 2(n - 1) - 2) \cdot 2^n = (a - 2n) \cdot 2^n. \end{aligned}$$

Für den Startwert $a = 2023$ ist also y_n für $n > 1013$ negativ.

Die gegebenen Rekursionsbeziehungen sind beide nicht homogen, so dass die allgemeine Theorie nicht unmittelbar angewendet werden kann. Beide Folgen lassen sich auch als HLR anschreiben.

Für (x_n) ergibt sich aus

$$x_n - 2x_{n-1} = x_{n-1} - 2x_{n-2} (= -1)$$

für $n > 2$ die HLR $x_n = 3x_{n-1} - 2x_{n-2}$ der Ordnung 2. Für die eindeutige Auflösung dieser Rekursion muss noch x_2 aus der ursprünglichen Rekursion bestimmt werden. Wir erhalten $x_2 = 4045$. Das charakteristische Polynom ist $p(x) = x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$ mit den Nullstellen $q_1 = 1$ und $q_2 = 2$. Dies führt auf den Ansatz $x_n = A \cdot 1^n + B \cdot 2^n$. A und B lassen sich aus den Gleichungen $x_1 = A + 2B = 2023$, $x_2 = A + 4B = 4045$ bestimmen. Es ergibt sich $A = 1, B = 1011$ und $x_n = 1011 \cdot 2^n + 1$ wie bereits oben berechnet.

Für (y_n) ergibt sich aus

$$y_n - 2y_{n-1} = 2\,(y_{n-1} - 2y_{n-2})\,(= -2^n)$$

die HLR $y_n = 4y_{n-1} - 4y_{n-2}$ mit dem charakteristischen Polynom $p(x) = x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$. Dies führt auf den Lösungsansatz $y_n = (A + B \cdot n)2^n$, wobei zur Bestimmung der Koeffizienten A und B noch $y_2 = 2y_1 - 4 = 4042$ benötigt wird. Es ergibt sich

$$y_n = \left(\frac{2025}{2} - n\right) \cdot 2^n = (2025 - 2n) \cdot 2^{n-1}$$

in Übereinstimmung mit dem früher berechneten Ergebnis.

3 Aufgaben aus [1]

Aufgabe 5 (Landesseminar Sachsen 2005, Klausur Klasse 9/10)
Bestimme die Einerziffer und die erste Ziffer nach dem Komma von b_{2005}, wenn

(a) $b_n = (2 + \sqrt{3})^n$.
(b) $b_n = (3 + \sqrt{7})^n$.

Lösung: Beide Ausdrücke lassen sich jeweils zu einer HLR der Ordnung 2 ergänzen, deren Folgenglieder ganzzahlig sind.

(a) Betrachte dazu die Folge $a_n = (2 + \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n$, die eine Kombination aus den Nullstellen $q_{1,2} = 2 \pm \sqrt{3}$ ist und so auf das charakteristsche Polynom $p(x) = (x-2)^2 - 3 = x^2 - 4x + 1$ und die Rekursion $a_n = 4a_{n-1} - a_{n-2}$ mit $a_0 = 2, a_1 = 4$ führt. Die letzte Ziffer von a_n ergibt sich als Rest modulo 10, also $a_n = (2, 4, 4, 2, 4, 4, \dots \pmod{10})$. Die Reste wiederholen sich periodisch mit der Periodenlänge 3. Wegen $2023 \equiv 1 \pmod 3$ ist also $a_{2023} \equiv a_1 = 4 \pmod{10}$. Wegen $0 < (2 - \sqrt{3}) < 1$ ist weiter $a_{2023} = \dots 4$ und $b_{2023} = \dots 3{,}9999\dots$.

Die letzten k Ziffern von a_n lassen sich mit Maxima auch direkt bestimmen, wenn alle Zwischenergebnisse bereits $\pmod{10^k}$ reduziert werden. Wie früher erläutert, sind die Rechnungen mit einer rekursiven Implementierung nicht erfolgreich, deshalb wird hier eine iterative Implementierung der Berechnung von $a_n \pmod{10^k}$ angegeben.

```
a(n,k):=block([u:2,v:4,w],
  thru n do (w:mod(4*v-u,10^k), u:v, v:w),
  u);
```

Die letzten 60 Stellen von a_{2023} können so leicht berechnet werden.

```
a(2023,60);
```

$$a_{2023} = \ldots 544477607903430234502941226114843894762534706639567206625764$$

(b) Betrachte die Folge $a_n = (2+\sqrt{5})^n + (2-\sqrt{5})^n$. Dies führt wie oben auf die Nullstellen $q_{1,2} = 2 \pm \sqrt{5}$, weiter auf das charakteristische Polynom $p(x) = (x-2)^2 - 5 = x^2 - 4x - 1$ und die Rekursion $a_n = 4a_{n-1} + a_{n-2}$, $a_0 = 2, a_1 = 4$. Für die letzte Ziffer erhalten wir $a_n = (2,4,8,6,2,4,8,\ldots \pmod{10})$, die Periodenlänge ist 4. Dann ist $a_{2023} \equiv a_3 = 6 \pmod{10}$, also $a_{2023} = \ldots 6$ und $a_{2023} < b_{2023} = \ldots 6{,}000\ldots$. Beachte dabei $0 > (2-\sqrt{5}) > -1$. Wie oben lassen sich die letzten 60 Stellen von a_{2023} bestimmen:

$$a_{2023} = \ldots 974562703306449804829226825960632014186192343935889477077276$$

Bemerkung: Da als Reste modulo 10 nur die fünf geraden Zahlen $0,2,4,6,8$ in Frage kommen, gibt es maximal $5^2 = 25$ Paare (r_1, r_2) von Resten modulo 10, die hier auftreten. Erstaunlicherweise treten alle Paare tatsächlich auf bis auf $(0,0)$, welches ein Orbit für sich ist.

Aufgabe 6 (Engel, S. 209) Man finde eine explizite Formel für

$$a_{n+1} = \frac{1}{16}\left(1 + 4a_n + \sqrt{1+24a_n}\right), \quad a_1 = 1.$$

Lösung: Wir bestimmen zunächst Zahlenwerte, etwa mit folgendem Maxima-Code:

```
a(n):=if n=1 then 1
else (1/16*(1+4*a(n-1)+sqrt(1+24*a(n-1))));
```

```
makelist(a(n),n,1,10);
```

$$\left[1, \frac{5}{8}, \frac{15}{32}, \frac{51}{128}, \frac{187}{512}, \frac{715}{2048}, \frac{2795}{8192}, \frac{11051}{32768}, \frac{43947}{131072}, \frac{175275}{524288}\right]$$

Wir erhalten nur rationale Zahlen, also steht unter der Wurzel aus irgendwelchen Gründen immer ein vollständiges Quadrat einer rationalen Zahl. Um diesem Phänomen auf den Grund zu gehen, betrachten wird die abgeleitete Folge $b_n = \sqrt{1+24a_n}$ mit $b_1 = 5, b_2 = 4$ und $a_n = \frac{b_n^2-1}{24}$. Setzt man dies in die Rekursion für a_n ein, so hat man nacheinander

$$\begin{aligned} a_{n+1} = \frac{b_{n+1}^2 - 1}{24} &= \frac{1}{16}\left(1 + \frac{b_n^2-1}{6} + b_n\right) \\ b_{n+1}^2 - 1 &= \frac{3}{2} \cdot \frac{6 + b_n^2 - 1 + 6b_n}{6} \\ b_{n+1}^2 &= \frac{1}{4}\left(b_n^2 + 6b_n + 9\right) = \left(\frac{b_n+3}{2}\right)^2. \end{aligned}$$

Da alle Glieder positiv sind, folgt daraus $b_{n+1} = \frac{1}{2}b_n + \frac{3}{2}$.
Die Rekursion ist von der Ordnung 1, aber keine HLR, die Theorie also nicht unmittelbar anwendbar. Wir versuchen den (nicht durch die Theorie gestützten) Ansatz $b_n = A \cdot 2^{-n} + B$. Aus den Startwerten $A = 4, B = 3$ ergibt sich die Formel

$$b_n = 4\left(\frac{1}{2}\right)^n + 3, n \geq 1,$$

die durch vollständige Induktion dann auch bewiesen werden kann. Für $n = 1$ prüft man die Gültigkeit unmittelbar, der Induktionsschritt ergibt sich aus

$$b_{n+1} = \frac{1}{2}b_n + \frac{3}{2} = \frac{1}{2} \cdot \left(4\left(\frac{1}{2}\right)^n + 3\right) + \frac{3}{2} = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + 2 \cdot \frac{3}{2} = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + 3.$$

Man kann die Rekursion aber auch wieder in eine HLR verwandeln, indem die Rekursionsbeziehungen für n und für $n+1$ verwendet werden, um den inhomogenen Teil zu eliminieren:

$$b_{n+2} - \frac{1}{2}b_{n+1} = b_{n+1} - \frac{1}{2}b_n,$$
$$b_{n+2} = \frac{3}{2}b_{n+1} - \frac{1}{2}b_n,$$

was auf das charakteristische Polynom

$$p(x) = x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{1}{2} = (x-1)\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

und so auf denselben Ansatz führt.

Aufgabe 7 (BB, Aufgabe 77, S. 16) Gegeben sei die rekursive Folge (a_n) mit

$$a_1 = a_2 = 1, \qquad a_n = \frac{a_{n-1}^2 + 2}{a_{n-2}}, \quad n \geq 3.$$

Beweisen Sie, dass alle Folgenglieder ganzzahlig sind.

Lösung: Die Berechnung von einigen Folgengliedern ergibt

$$(a_n) = (1, 1, 3, 11, 41, 153, 571, 2131, 7953, 29681, \dots)$$

und legt die Vermutung nahe, dass dies in der Tat der Fall ist.
Wir formen die Rekursionsbeziehung zunächst so um, dass in der Formel kein Quotient mehr enthalten ist:

$$a_n a_{n-2} = a_{n-1}^2 + 1.$$

Diese Beziehung gilt für alle $n > 3$. Wir betrachten neben dieser Beziehung für den Index n wieder dieselbe Beziehung für den Index $n+1$:

$$a_n a_{n-2} = a_{n-1}^2 + 1,$$
$$a_{n+1} a_{n-1} = a_n^2 + 1.$$

Die Differenz ergibt $a_n\left(a_n+a_{n-2}\right)=a_{n-1}\left(a_{n+1}+a_{n-1}\right)$ und weiter

$$c_n=\frac{a_n+a_{n-2}}{a_{n-1}}=\frac{a_{n+1}+a_{n-1}}{a_n}=c_{n+1}.$$

Die Folge (c_n) ist also konstant mit $c_n=4$ und (a_n) genügt der Rekursionsbeziehung

$$a_{n+2}=4a_{n+1}-a_n.$$

Damit ist die Ganzzahligkeit der Folgenglieder bereits gezeigt.

Wir berechnen noch die explizite Darstellung. Das charakteristische Polynom $p(x)=x^2-4x+1$ hat die beiden Nullstellen $q_1=2+\sqrt{3}$ und $q_2=2-\sqrt{3}=q_1^{-1}$. Es gilt also $a_n=Aq_1^n+Bq_2^n$ für geeignete A,B, die sich aus $a_1=a_2=1$ als $A=\frac{9-5\sqrt{3}}{6}, B=\frac{9+5\sqrt{3}}{6}$ bestimmen lassen. Daraus ergibt sich die explizite Formel

$$a_n=\frac{9-5\sqrt{3}}{6}\left(2+\sqrt{3}\right)^n+\frac{9+5\sqrt{3}}{6}\left(2-\sqrt{3}\right)^n.$$

Aufgabe 8 Gegeben sei eine Folge (a_n) mit $a_1=A$, $a_2=B$ und

$$a_n=\frac{a_{n-1}^2+C}{a_{n-2}},\quad n\geq 3.$$

Beweisen Sie, dass aus der Ganzzahligkeit von

$$A,\ B,\ \frac{A^2+B^2+C}{AB}$$

folgt, dass alle Folgenglieder a_n ganzzahlig sind.

Lösung: Diese Aufgabe verallgemeinert Aufgabe 7, die sich für $A=B=C=1$ ergibt.

Wir setzen $D=\dfrac{A^2+B^2+C}{AB}$. Damit ist

$$C=ABD-A^2-B^2 \text{ und } a_3=\frac{B^2+C}{A}=\frac{ABD-A^2}{A}=BD-A.$$

Aus der Rekursionsbeziehung für n und $n+1$ erhalten wir

$$a_na_{n-2}=a_{n-1}^2+C,\ a_{n+1}a_{n-1}=a_n^2+C.$$

Die Differenz ergibt $a_n\left(a_n+a_{n-2}\right)=a_{n-1}\left(a_{n+1}+a_{n-1}\right)$ und weiter

$$c_n=\frac{a_n+a_{n-2}}{a_{n-1}}=\frac{a_{n+1}+a_{n-1}}{a_n}=c_{n+1}.$$

Die Folge (c_n) ist also konstant und wir erhalten $c_n=c_3=\dfrac{a_3+a_1}{a_2}=\dfrac{BD-A+A}{B}=D.$ (a_n) genügt also der Rekursion $a_{n+2}=Da_{n+1}-a_n$.

Aufgabe 9 (MO 261242) Ermittle alle Zahlenfolgen mit $a_1=1$, $a_2=\frac{5}{2}$, für die

$$a_{m+n}\cdot a_{m-n}=a_m^2-a_n^2 \text{ für alle } m>n>0$$

gilt.

Lösung: Für $m = 1$ ergibt sich $a_{n+1} = \dfrac{a_n^2 - 1}{a_{n-1}}$, womit die Zahlenfolge zumindest eindeutig bestimmt ist, wenn sie existiert.

Die Rekursionsbeziehung ist von ähnlicher Bauart wie die in Aufgabe 8, wobei die dortige Ableitung der linearen Rekursion nicht daran gebunden ist, dass A, B, C ganzzahlig sind. Hier ist $A = 1, B = \frac{5}{2}, C = -1$ und damit $D = \dfrac{A^2 + B^2 + C}{AB} = \frac{5}{2}$. Die Folge a_n erfüllt also die Rekursion $a_{n+2} = \frac{5}{2} a_{n+1} - a_n$. Das charakteristische Polynom ist $p(x) = x^2 - \frac{5}{2}x + 1$ mit den Nullstellen $q_1 = 2, q_2 = \frac{1}{2}$. Die explizite Bildungsvorschrift ergibt sich aus dem Ansatz $a_n = Aq_1^n + Bq_2^n$, für den man aus den Startwerten $A = \frac{2}{3}, B = -\frac{2}{3}$ ermittelt. Einziger Lösungskandidat ist also die Folge

$$a_n = \frac{2}{3}\left(2^n - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right).$$

Die Gültigkeit der Beziehung

$$a_{m+n} \cdot a_{m-n} = a_m^2 - a_n^2 \text{ für alle } m > n > 0$$

rechnet man leicht nach.

Aufgabe 10 Gegeben sei die rekursive Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$a_1 = a_2 = a_3 = 1, \quad a_n = \frac{a_{n-1}a_{n-2} + 1}{a_{n-3}}, \quad n \geq 4.$$

Beweisen Sie, dass alle Folgenglieder ganzzahlig sind.

Diese Aufgabe ist ähnlich zur Aufgabe 2.2 im BWM 2003 [2].

> Zeigen Sie, dass alle Glieder der durch
>
> $$a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = 2 \text{ sowie } a_{n+3} = \frac{a_{n+2}a_{n+1} + 7}{a_n} \text{ für } n > 0$$
>
> gegebenen Folge ganzzahlig sind.

Berechnet man numerisch die Quotienten aufeinanderfolgender Glieder eines Anfangsstücks der Folge, so ergeben sich näherungsweise alternierend zwei Werte, was die Vermutung nahe legt, dass – wie in der dritten Lösung der BWM-Aufgabe – die Folge über zwei verschränkte Rekursionsbeziehungen für gerade und ungerade Indizes berechnet werden kann. Dies ist in der Tat so.

Lösung: Wir bilden wieder die Differenz der Rekursionsbeziehung für n und $n + 1$:

$$a_n a_{n-3} = a_{n-1}a_{n-2} + 1,\ a_{n+1}a_{n-2} = a_n a_{n-1} + 1,$$
$$a_n\left(a_{n-1} + a_{n-3}\right) = a_{n-2}\left(a_{n+1} + a_{n-1}\right),$$
$$c_{n+1} = \frac{a_{n+1} + a_{n-1}}{a_n} = \frac{a_{n-1} + a_{n-3}}{a_{n-2}} = c_{n-1}.$$

Im Gegensatz zur Aufgabe 7 und 8 ist hier also

$$c_3 = c_5 = \cdots = \frac{a_3 + a_1}{a_2} = 2 \text{ und } c_4 = c_6 = \cdots = \frac{a_4 + a_2}{a_3} = 3,$$

was die Rekursionen

$$a_{2n} = 3a_{2n-1} - a_{2n-2} \text{ und } a_{2n+1} = 2a_{2n} - a_{2n-1}$$

liefert. Daraus folgt zunächst die Ganzzahligkeit der Folgenglieder.

In der ersten Lösung der BWM-Aufgabe wird eine einfache Rekursion der Ordnung 4 angegeben, der die Folge ebenfalls genügt. Das soll nun für die hier gegebene Folge ebenfalls hergeleitet werden. Es gilt

$$\begin{aligned} a_{2n+2} &= 3a_{2n+1} - a_{2n}, a_{2n} = 3a_{2n-1} - a_{2n-2} \\ a_{2n+2} + a_{2n} &= 3\left(a_{2n+1} + a_{2n-1}\right) - a_{2n} - a_{2n-2} \\ a_{2n+2} &= 6a_{2n} - 2a_{2n} - a_{2n-2} = 4a_{2n} - a_{2n-2} \end{aligned}$$

und ähnlich

$$\begin{aligned} a_{2n+1} &= 2a_{2n} - a_{2n-1}, a_{2n-1} = 3a_{2n-2} - a_{2n-3} \\ a_{2n+1} &= 2a_{2n} - a_{2n-1}, a_{2n-1} = 3a_{2n-2} - a_{2n-3} \\ a_{2n+1} &= 2\left(a_{2n} + a_{2n-2}\right) - 2a_{2n-1} - a_{2n-3} \\ &= 6a_{2n-1} - 2a_{2n-1} - a_{2n-3} = 4a_{2n-1} - a_{2n-3}. \end{aligned}$$

Die Folge genügt also der gemeinsamen Rekursion $a_{n+4} = 4a_{n+2} - a_n$. Daraus ergibt sich als explizite Formel der Ansatz

$$a_n = Aq_1^n + B\left(-q_1\right)^n + Cq_2^n + D\left(-q_2\right)^n$$

mit $q_1 = \sqrt{2+\sqrt{3}}$ und $q_2 = \sqrt{2-\sqrt{3}} = q_1^{-1}$, da das charakteristische Polynom $p(x) = x^4 - 4x^2 + 1$ die vier Nullstellen $\pm q_1, \pm q_2$ hat.

Aufgabe 11 (BB, S. 16, Aufgabe 76) Gegeben sei eine Folge $(a_n)_{n\geq 0}$ von ganzen Zahlen mit

$$3a_n = a_{n-1} + a_{n+1}, \quad n \geq 1.$$

Beweisen Sie, dass $5a_n^2 + 4(a_0^2 + a_1^2 - 3a_0a_1)$ stets eine Quadratzahl ist.

Lösung: Symbolische Berechnung der ersten Werte der Folge

$$b_n = 5a_n^2 + 4\left(a_0^2 + a_1^2 - 3a_0a_1\right)$$

ergibt $b_n = c_n^2$ mit einer Folge $c_0 = 3a_0 - 2a_1$, $c_1 = 2a_0 - 3a_1 = 3a_1 - 2a_2$ und $c_{n+2} = 3c_{n+1} - c_n$. Das legt die Vermutung $c_n = 3a_n - 2a_{n+1}$ nahe. Es bleibt zu zeigen, dass dies allgemein gilt. Beweis mit Induktion und $a_n = 3a_{n+1} - a_{n+2}$, wobei der Induktionsanfang schon gezeigt wurde.

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= b_n + 5a_{n+1}^2 - 5a_n^2 = \left(3a_n - 2a_{n+1}\right)^2 + 5a_{n+1}^2 - 5a_n^2 \\ &= \left(7a_{n+1} - 3a_{n+2}\right)^2 + 5a_{n+1}^2 - 5\left(3a_{n+1} - a_{n+2}\right)^2 \\ &= 9a_{n+1}^2 - 12a_{n+1}a_{n+2} + 4a_{n+2}^2 = \left(3a_{n+1} - 2a_{n+2}\right)^2 = c_{n+1}^2. \end{aligned}$$

Aufgabe 12 Es seien (x_n) und (y_n) rekursive Folgen, gegeben durch

$$\begin{aligned} x_1 = 1,\ x_2 = 1,\ x_{n+2} = x_{n+1} + 2x_n, \quad n \in \mathbb{N}, \\ y_1 = 1,\ y_2 = 7,\ y_{n+2} = 2y_{n+1} + 3y_n, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Beweisen Sie, dass außer $x_1 = y_1 = 1$ die beiden Folgen keine gemeinsamen Folgenglieder besitzen.

Lösung: Wir betrachten beide Folgen modulo 8 und erhalten

$$\begin{aligned} x_n &\equiv 1, 1, 3, 5, 3, 5, \cdots \pmod 8, \\ y_n &\equiv 1, -1, 1, -1, \cdots \pmod 8). \end{aligned}$$

Folglich können nur die ersten Folgenglieder übereinstimmen.

Man kann hier auch die expliziten Bildungsvorschriften bestimmen, was allerdings in der gestellten Frage nicht weiterhilft.

Die Folge x_n hat $p(x) = x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1)$ als charakteristisches Polynom und damit gilt $x_n = A \cdot 2^n + B \cdot (-1)^n$. Einsetzen der Startwerte liefert $A = \frac{1}{3}, B = -\frac{1}{3}$ und somit $x_n = \frac{1}{3}\left(2^n - (-1)^n\right)$.

Für die Folge y_n ist $p(x) = x^2 - 2x - 3 = (x-3)(x+1)$ und damit $y_n = A \cdot 3^n + B \cdot (-1)^n$. Einsetzen der Startwerte liefert $A = \frac{2}{3}, B = 1$ und somit $y_n = 3^{n-1} + (-1)^n$.

Aufgabe 13 Es sei $f(x)$ ein Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten und $f(0) = f(1) = 1$ und $a_1 \in \mathbb{Z}$ beliebig gegeben. Ferner sei $a_{n+1} = f(a_n)$ für alle $n \geq 1$.

Beweisen Sie, dass die Folgenglieder paarweise teilerfremd sind.

Lösung: Für $f(x) = c_n x^n + \cdots + c_1 x + c_0$ ist $f(0) = c_0 = 1$ und $f(1) - c_0 = c_n + c_{n-1} + \cdots + c_1 = 0$. Damit ist

$$\begin{aligned} a_{k+1} = f(a_k) &= a_k \left(c_n a_k^{n-1} + \cdots + c_1\right) + 1 \\ &= a_k \left(c_n \left(a_k^{n-1} - 1\right) + \cdots + c_1(1-1)\right) + 1 \\ &= a_k \left(a_k - 1\right) \cdot p_k + 1 \end{aligned}$$

und zunächst $\gcd\left(a_{k+1}, a_k\right) = 1$. Mit Induktion zeigt man $a_k - 1 = a_{k-1} \cdot \ldots \cdot a_1 \cdot q_k$. In der Tat, setzt man das oben ein, so ergibt sich

$$a_{k+1} - 1 = a_k \left(a_k - 1\right) \cdot p_k = a_k \cdot a_{k-1} \cdot \ldots \cdot a_1 \cdot q_k \cdot p_k$$

und so $q_{k+1} = q_k \cdot p_k$. Damit sind die a_k aber paarweise teilerfremd.

3.1 Periodizität der Fibonacci-Zahlen modulo m

Aufgabe 14 Es sei $m \in \mathbb{N}$ eine fixierte natürliche Zahl.

(a) Beweise, dass es eine Fibonacci-Zahl a_n gibt, die durch m teilbar ist.
(b) Zeige, dass es eine Fibonacci-Zahl gibt, die auf m Neunen endet.

Beweis: (a) Wir betrachten sämtliche Paare von Resten (a_n, a_{n+1}) modulo m. Da es höchstens $m \times m = m^2$ solcher Paare gibt, wiederholt sich nach spätestens $p \leq m^2$ Schritten ein Paar:

$$(a_n, a_{n+1}) = (a_{n+p}, a_{n+p+1}) \pmod{m}.$$

Da sich aus (a_n, a_{n+1}) und der Beziehung $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ bzw. $a_{n-1} = a_{n+1} - a_n$ das vorherige und das nächste Folgenglied eindeutig ergeben, kann es keine Vorperiode geben und die Paare (a_0, a_1) bzw. (a_{-2}, a_{-1}) wiederholen sich nach p Schritten. Nun ist aber

$$a_0 = 0, \quad a_{-1} = 1, \quad a_{-2} = -1.$$

Daher treten die Reste 0, 1 und -1 modulo m stets auf.

(b) Man betrachte als Modul 10^m und die Folgenglieder, welche kongruent -1 modulo 10^m sind. $\square$

Die Periodizität der modularen Fibonaccifolge kann mit folgender Darstellung genauer untersucht werden: Es gilt

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = M \cdot \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix} \text{ mit } M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und damit

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = M^n \begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \end{pmatrix}.$$

Die Fibonaccifolge hat damit eine Periode p modulo m genau dann, wenn $M^p \equiv E \pmod{m}$ gilt, wobei E die Einheitsmatrix ist.

Für $m = 10^k$ (also die Frage nach den Neunen) ergibt sich $M^{15 \cdot m} \equiv E \pmod{m}$. Hat man dies für kleine k überprüft, so ergibt sich wegen

$$M^{15 \cdot 10^{k+1}} = \left(M^{15 \cdot 10^k}\right)^{10} \equiv \left(E + a \cdot 10^k\right) \equiv E + \binom{10}{1} \cdot a \cdot 10^k \equiv E \pmod{10^{k+1}},$$

dass dies auch für alle $k > 2$ gilt.

Literatur

[1] A. Schüler. *Rekursive Folgen.* KoSemNet Textsammlung.
`https://lsgm.uni-leipzig.de/KoSemNet/pdf/schueler-05-1.pdf`

[2] Bundeswettbewerb Mathematik 2003. 2. Runde.
`https://www.mathe-wettbewerbe.de/aufgaben`

Attribution Section

graebe (2024-02-14): Contributed to KoSemNet