Eine Anmerkung zum Aufsatz [1] von M. Dostal

Hans-Gert Gräbe, Leipzig

Ich hatte bereits vor einem Jahr in einem Aufsatz [2] auf die Eleganz der Methode der erzeugenden Funktionen zur Lösung rekursiver Abzählaufgaben hingewiesen. Auch bei mehrstelligen Rekursionen wie in der Problemstellung, die im Aufsatz [1] von Marion Dostal besprochen wird, leistet dieser Ansatz gute Dienste, wie ich nun ausführen werde.

M. Dostal fragt nach der Anzahl der k-dimensionalen „Seitenflächen“ eines n-dimensionalen Hyperwürfels und stellt dazu die Rekursionsbeziehungen

$$v_d^0 = 2\,v_{d-1}^0 \text{ für } d \geq 1 \tag{1}$$

sowie

$$v_d^k = 2\,v_{d-1}^k + v_{d-1}^{k-1} \text{ für } d \geq 1,\ k \geq 1 \tag{2}$$

auf, die ich noch durch die Setzung $v_0^0 = 1$ und $v_0^k = 0$ für $k \geq 1$ ergänzen möchte.

Zu dieser zweidimensionalen Abzählfolge kann die erzeugende Funktion

$$V(x,y) = \sum_{k\geq 0, d\geq 0} v_d^k\, x^k\, y^d$$

gebildet werden. Die Zerlegung

$$V(x,y) = 1 + \sum_{d\geq 1} v_d^0\, y^d + \sum_{k\geq 1, d\geq 1} v_d^k\, x^k\, y^d$$

und die Rekursionen (1) und (2) führen auf folgende funktionale Beziehung für $V(x,y)$:

$$\begin{aligned} V(x,y) &= 1 + \sum_{d\geq 1} 2\,v_{d-1}^0\, y^d + \sum_{k\geq 1, d\geq 1} 2\,v_{d-1}^k\, x^k\, y^d + \sum_{k\geq 1, d\geq 1} v_{d-1}^{k-1}\, x^k\, y^d \\ &= 1 + 2\,y \sum_{d\geq 0} v_d^0\, y^d + 2\,y \sum_{k\geq 1, d\geq 0} v_d^k\, x^k\, y^d + x\,y \sum_{k\geq 0, d\geq 0} v_d^k\, x^k\, y^d \\ &= 1 + 2\,y \sum_{k\geq 0, d\geq 0} v_d^k\, x^k\, y^d + x\,y \sum_{k\geq 0, d\geq 0} v_d^k\, x^k\, y^d \\ &= 1 + (2\,y + x\,y)\, V(x,y) \end{aligned}$$

und schließlich auf die Darstellung

$$V(x,y) = \frac{1}{1 - 2\,y - x\,y}$$

von $V(x,y)$ als rationale Funktion. Eine solche mehrstellige Funktion kann an der Stelle $x = y = 0$ in eine (mehrdimensionale) Taylorreihe entwickelt werden, deren Koeffizienten eindeutig bestimmt sind und die sich mit einem CAS berechnen lassen, etwa mit Maxima [3]:

This material belongs to the Public Domain KoSemNet data base. It can be freely used, distributed and modified, if properly attributed. Details are regulated by the *Creative Commons Attribution License*, see `http://creativecommons.org/licenses/by/3.0`.
For the KoSemNet project see `http://www.lsgm.de/KoSemNet`.

```
s:1/(1-(2+x)*y);
taylor(s,x,0,4,y,0,6);
```

$$
\begin{aligned}
&1 + 2\,y + 4\,y^2 + 8\,y^3 + 16\,y^4 + 32\,y^5 + 64\,y^6 + \dots \\
&\quad + (y + 4\,y^2 + 12\,y^3 + 32\,y^4 + 80\,y^5 + 192\,y^6 + \dots)\,x \\
&\quad + (y^2 + 6\,y^3 + 24\,y^4 + 80\,y^5 + 240\,y^6 \dots)\,x^2 \\
&\quad + (y^3 + 8\,y^4 + 40\,y^5 + 160\,y^6 + \dots)\,x^3 \\
&\quad + (y^4 + 10\,y^5 + 60\,y^6 + \dots)\,x^4 + \dots
\end{aligned}
$$

in Übereinstimmung mit den Ergebnissen in [1].

In diesem Fall lässt sich die Taylordarstellung aber auch leicht in geschlossener Form berechnen. Wenden wir die Formel der geometrischen Reihe und den binomischen Satz an, so ergibt sich nacheinander

$$V(x,y) = \frac{1}{1-(2+x)\,y} = \sum_{d\ge 0} (2+x)^d\, y^d = \sum_{d\ge 0} \left(\sum_{0\le k\le d} \binom{d}{k}\, 2^k\, x^k \right) y^d$$

und damit unmittelbar die auch von der Autorin in [1] hergeleitete Formel $v_d = \binom{d}{k}\, 2^k$.

1. [1] Marion Dostal: Bestimmung *d*-dimensionaler Würfel. Wurzel **44**, Heft 11 (2010), S. 253 – 255
2. [2] Hans-Gert Gräbe: Eine Anmerkung zum Wurzel-Artikel „Erleichterung durch Markow-Prozesse“. Wurzel **43**, Heft 11 (2009), S. 241 – 243
3. [3] Maxima 5.20.1, `http://maxima.sourceforge.net`

Attribution Section

graebe (2010-12-16)