Eine Anmerkung zum Aufsatz [1] von P. Gallin

Hans-Gert Gräbe, Leipzig

Der Artikel [1] bietet ein weiteres schönes Beispiel, dass sich rekursive Abzählaufgaben am besten über *erzeugende Funktionen* lösen lassen.
Gallin leitet dort mit $a = \frac{1}{6}$, $b = \frac{5}{6}$ für den Fall des Doppelsechsers die Rekursionsformel

$$P_0 = 1,\ P_1 = b, \quad P_k = P_{k-1} \cdot b + P_{k-2} \cdot a\, b \quad \text{für } k \geq 2 \tag{1}$$

her und findet einen komplizierten expliziten Ausdruck für P_k als Summe vom Binomialkoeffizienten, mit dem sich kaum weiterrechnen lässt. Verwendet man stattdessen die erzeugende Funktion

$$P(t) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k \cdot t^k\,,$$

so ergibt (1), aufsummiert über $k \geq 2$,

$$\sum_{k=2}^{\infty} P_k \cdot t^k = \sum_{k=2}^{\infty} P_{k-1} \cdot b \cdot t^k + \sum_{k=2}^{\infty} P_{k-2} \cdot a\, b \cdot t^k$$

$$P(t) - 1 - b\,t = (P(t) - 1) \cdot b\,t + P(t) \cdot a\,b\,t^2$$

und schließlich

$$P(t) = \frac{1}{1 - b\,t - a\,b\,t^2}\,.$$

Aus dieser Formel lassen sich für die gegebenen rationalen Werte für a und b mit einem CAS nun die *exakten* Werte von P_k über eine Taylorreihenentwicklung für eine Reihe größerer k schnell bestimmen, etwa mit MuPAD

```
taylor(subs(P(t),a=1/6,b=5/6),t=0,8);
```

$$1 + \frac{5}{6}\,t + \frac{5}{6}\,t^2 + \frac{175}{216}\,t^3 + \frac{1025}{1296}\,t^4 + \frac{125}{162}\,t^5 + \frac{35125}{46656}\,t^6 + \frac{205625}{279936}\,t^7 + \frac{66875}{93312}\,t^8 + \dots$$

Für die Berechnung des Erwartungswerts $E = a^2 \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)\,P_k$ ist dieser Umweg allerdings ebenfalls nicht erforderlich, wenn zunächst die Funktion

$$\begin{aligned} E(t) &= a^2 \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)\,P_k\,t^{k+1} \\ &= a^2 \left(P(t) \cdot t^2\right)' = \frac{2\,t - b\,t^2}{a^2\,b^2\,t^4 + 2\,a\,b^2\,t^3 - 2\,a\,b\,t^2 + \ b^2\,t^2 - 2\,b\,t + 1} \end{aligned}$$

oder mit den Zahlenwerten für a und b

$$E(t) = \frac{72\,t - 30\,t^2}{25\,t^4 + 300\,t^3 + 540\,t^2 - 2160\,t + 1296}$$

betrachtet wird. Hierbei wird verwendet, dass die erzeugende Funktion $P(t)$ eine genügend glatte analytische Funktion ist. $'$ bezeichnet die Ableitung nach t. Der gesuchte Erwartungswert E ergibt sich nun als (Grenz)-Wert $E = E(1) = 42$.
Ähnlich ergibt sich für den Dreifachsechser die Rekursionsformel

$$P_0 = 1,\; P_1 = b,\; P_2 = a\,b + b^2, \quad P_k = P_{k-1} \cdot b + P_{k-2} \cdot a\,b + P_{k-3} \cdot a^2\,b \quad \text{für } k \geq 3 \tag{2}$$

und daraus für die erzeugende Funktion $P(t) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k \cdot t^k$ nacheinander

$$\sum_{k=3}^{\infty} P_k \cdot t^k = \sum_{k=3}^{\infty} P_{k-1} \cdot b \cdot t^k + \sum_{k=3}^{\infty} P_{k-2} \cdot a\,b \cdot t^k + \sum_{k=3}^{\infty} P_{k-3} \cdot a^2\,b \cdot t^k$$

$$P(t) - 1 - b\,t - (a\,b + b^2)\,t^2 = (P(t) - 1 - b\,t) \cdot b\,t + (P(t) - 1) \cdot a\,b\,t^2 + P(t) \cdot a^2\,b\,t^3$$

und schließlich

$$P(t) = \frac{1}{1 - b\,t - a\,b\,t^2 - a^2\,b\,t^3}\,.$$

Zur Berechnung des Erwartungswerts $E = a^3\,\sum_{k=0}^{\infty} (k+3)\,P_k$ bestimmen wir wieder zunächst

$$E(t) = a^3\,\sum_{k=0}^{\infty} (k+3)\,P_k\,t^{k+2} = a^3\,\left(P(t) \cdot t^3\right)'$$

und erhalten mit den gegebenen Zahlenwerten unmittelbar

$$E(t) = \frac{648\,t^2 - 360\,t^3 - 30\,t^4}{25\,t^6 + 300\,t^5 + 2700\,t^4 + 8640\,t^3 + 19440\,t^2 - 77760\,t + 46656}$$

und daraus $E = E(1) = 258$.

1. [1] Peter Gallin: Erleichterung durch Markow-Prozesse. Wurzel **43**, Heft 6 (2009), S. 130 – 137

Attribution Section

graebe (2009-08-04)