Beweisen von Ungleichungen
Arbeitsmaterial für Klasse 8

Hans-Gert Gräbe, Leipzig

> Statt die Ungleichung $A(x) \geq B(x)$ zu beweisen, ist es oft einfacher, die Ungleichung $A(x) - B(x) \geq 0$ zu beweisen.

Zeige für reelle Zahlen $a, b \geq 0$, dass $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{a\,b}$ gilt.

Vorüberlegung: Die Ungleichung kann in die Form

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - a\,b = \frac{a^2 + 2\,a\,b + b^2}{4} - a\,b \geq 0$$

gebracht werden. Umformen der linken Seite ergibt den Ausdruck

$$\frac{a^2 + 2\,a\,b + b^2}{4} - a\,b = \frac{a^2 - 2\,a\,b + b^2}{4} = \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$$

Dieser ist als Quadrat einer rellen Zahl stets nicht-negativ. Mehr noch, Gleichheit gilt genau dann, wenn $a = b$ ist.

Dies ist jedoch erst die Analyse der Aufgabe durch Rückwärtsarbeiten, wobei wir von der Behauptung ausgegangen sind. Ein **mathematischer Beweis** ist in umgekehrter Richtung zu führen, also von einer wahren Aussage ausgehend durch eine logisch einwandfreie Schlusskette die behauptete Aussage abzuleiten. Hier könnte wie folgt argumentiert werden:

Beweis: Da das Quadrat einer rellen Zahl stets nichtnegativ ist, gilt nacheinander

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 \geq 0 \\
\Rightarrow\quad & \frac{a^2 - 2\,a\,b + b^2}{4} \geq 0 \\
\Rightarrow\quad & \frac{a^2 + 2\,a\,b + b^2}{4} - a\,b \geq 0 \\
\Rightarrow\quad & \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \geq a\,b \\
\Rightarrow\quad & \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{a\,b}\,,
\end{aligned}$$

wobei die letzte Umformung wegen $a, b \geq 0$ möglich ist. $\square$

Die eben bewiesene Ungleichung ist eine spezielle Form der *Ungleichung vom arithmetisch-geometrischen Mittel* (a.-g. M.). Für Zahlen $a_1, \ldots, a_n \geq 0$ bezeichnet man

$$A(a_1, \ldots, a_n) = \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}$$

als *arithmetisches Mittel* und

$$G(a_1, \ldots, a_n) = \sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n}$$

als *geometrisches Mittel*.
Offensichtlich liegt jedes dieser Mittel zwischen der größten $\max(a_1, \ldots, a_n)$ und der kleinsten $\min(a_1, \ldots, a_n)$ dieser Zahlen. Andere Quellen bezeichnen $A(a_1, \ldots, a_n)$ als Mittel vom Grad 1 und $G(a_1, \ldots, a_n)$ als Mittel vom Grad 0.
Die eben bewiesene Ungleichung kann als $A(a, b) \geq G(a, b)$ angeschrieben werden.
Allgemein gilt für $a_1, \ldots, a_n \geq 0$ die Ungleichung

$$A(a_1, \ldots, a_n) \geq G(a_1, \ldots, a_n)$$

und Gleichheit tritt genau für den Fall $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ ein. Diese Aussage werden wir hier nicht beweisen[1].

Eine Ungleichung $A(x) \geq 0$ kann oft durch Zerlegung von $A(x)$ in Faktoren auf andere Ungleichungen zurückgeführt werden.

Beweise für $a, b, c \geq 0$ die Gültigkeit der Ungleichung

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq 3\,a\,b\,c \tag{1}$$

Die Umformung in $a^3 + b^3 + c^3 - 3\,a\,b\,c \geq 0$ legt eine Faktorzerlegung von $a^3 + b^3 + c^3 - 3\,a\,b\,c$ nahe. Diese ist nicht offensichtlich, aber man kann etwa durch Ausmultiplizieren prüfen, dass

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3\,a\,b\,c = (a + b + c) \cdot (a^2 - a\,b - a\,c + b^2 - b\,c + c^2)$$

gilt. Folglich reicht es aus, die Ungleichung

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq a\,b + a\,c + b\,c \tag{2}$$

zu beweisen. Diese lässt sich durch eine weitere Methode herleiten:

Viele Ungleichungen lassen sich durch geschickte Zerlegungen auf eine der grundlegenden Ungleichungen, vor allem die Ungleichung vom arithmetisch-geometrischen Mittel, zurückführen.

[1] Ein Beweis dieser Ungleichung wird etwa im KoSemNet-Aufsatz [graebe-97-1] gegeben.

In der Tat gilt $a^2 + b^2 \geq 2\,a\,b$, $a^2 + c^2 \geq 2\,a\,c$ und $b^2 + c^2 \geq 2\,b\,c$ nach der Ungleichung vom a.-g. M. Addieren wir die drei Ungleichungen, so ergibt sich

$$2\left(a^2 + b^2 + c^2\right) \geq 2\,a\,b + 2\,a\,c + 2\,b\,c$$

und damit die Ungleichung (2). Da wegen $a, b, c \geq 0$ auch $a + b + c \geq 0$ gilt, können wir die Ungleichung

$$a^2 + b^2 + c^2 - (a\,b + a\,c + b\,c) \geq 0 \tag{3}$$

mit $(a + b + c)$ multiplizieren, erhalten

$$(a + b + c) \cdot (a^2 - a\,b - a\,c + b^2 - b\,c + c^2) = a^3 + b^3 + c^3 - 3\,a\,b\,c \geq 0$$

und schließlich einen Beweis der Ungleichung (1).

Oft lassen sich Aufgaben, die auf den ersten Blick gar nicht danach aussehen, auf bekannte Ungleichungen zurückführen.

Für zwei reelle Zahlen $x, y > 0$ sei $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 3$. Zeige, dass dann $x\,y \geq \frac{4}{9}$ gilt.

Diese Aufgabe „riecht“ nach der Ungleichung vom a.-g. M., denn für $x = y\,(= \frac{2}{3})$ gilt gerade $x\,y = \frac{4}{9}$. Und in der Tat erhalten wir nacheinander

$$\begin{aligned} & 3 = 1/x + 1/y \\ \Rightarrow \quad & \frac{3}{2} = \frac{1/x + 1/y}{2} \geq \sqrt{\frac{1}{x}\,\frac{1}{y}} = \frac{1}{\sqrt{x\,y}} \end{aligned}$$

Wir bilden nun das Reziproke beider Seiten, wobei sich das Relationszeichen umkehrt (hier ist auch wesentlich, dass beide Seiten der Ungleichung positive Zahlen sind).

$$\Rightarrow \quad \frac{2}{3} \leq \sqrt{x\,y}$$

Schließlich quadrieren wir diese Ungleichung und haben die Behauptung bewiesen.

$$\Rightarrow \quad \frac{4}{9} \leq x\,y$$

Attribution Section

graebe (2006-03-16):
Begleitmaterial für den LSGM-Korrespondenzzirkel in der Klasse 8