Der Polyasche Abzählsatz und Färbungen regulärer Polyeder

Hans-Gert Gräbe, Leipzig

Der Polyasche Abzählsatz behandelt folgende Abzählaufgabe:

> (Unterscheidbare) Teile eines Objekts O sollen mit (unterscheidbaren) Farben aus einer Menge F gefärbt werden, wobei zwei Färbungen als "gleich" zählen, wenn sie durch eine "Symmetrie" von O in Übereinstimmung gebracht werden können.

Genauer: Bezeichne M die Menge der (unterscheidbaren) zu färbenden Teile von O. Eine Färbung ist dann eine Abbildung $f : M \to F$. Ist $\sigma \in G$ eine Symmetrie von O, so beschreibt diese Symmetrie eine Permutation der Elemente von M. Zwei Färbungen $f_1, f_2 \in Map(M, F)$ heißen *äquivalent*, wenn sie sich um eine solche Symmetrie unterscheiden, d.h. wenn $f_1 = f_2 \circ \sigma$ gilt[1].

Wir wollen im Weiteren nicht zwischen den Symmetrien und diesen Permutationen unterscheiden und mit G die Gruppe der Permutationen der Elemente von M bezeichnen, die diesen Symmetrien entspricht. Dazu und um die Unterscheidbarkeit zu gewährleisten werden wir die Elemente von M durchnummerieren: $M = \{1, \dots, n\}$.

Beispiel: Finde die Anzahl aller Möglichkeiten, von den 6 Kanten eines regulären Tetraeders drei rot und drei blau zu färben, wobei zwei Färbungen als gleich gelten, wenn sie durch eine Drehung des Tetraeders ineinander überführt werden können. $M = \{1, \dots, 6\}$ ist die (durchnummerierte) Menge der Kanten des Tetraeders, $F = \{\text{rot}, \text{blau}\}$. Ohne Berücksichtigung der Symmetrien gibt es genau $\binom{6}{3} = 20$ verschiedene Kantenfärbungen der angegebenen Art (wähle aus den 6 Kanten die drei rot zu färbenden und färbe die restlichen blau), mit Berücksichtigung der Symmetrien nur 4.

Zyklentyp und Zyklenzeiger

Wir wollen immer $M = \{1, \dots, n\}$ annehmen. G besteht also aus Permutationen von n Elementen.

Jede Permutation $\sigma \in G$ lässt sich auf eindeutige Weise in elementfremde Zyklen zerlegen. Besteht σ aus b_i Zyklen der Länge i, so nennen wir

$$ZT(\sigma) = x_1^{b_1} x_2^{b_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{b_n}$$

[1] $f_2 \circ \sigma$ steht für die Nacheinanderausführung (Komposition) der beiden Abbildungen $M \xrightarrow{\sigma} M \xrightarrow{f_2} F$ und bedeutet $f_1(o) = f_2(\sigma(o))$ für alle Teile $o \in M$, d.h. dass die Farbe $f_1(o)$ von o in der Färbung f_1 gleich der Farbe $f_2(\sigma(o))$ von $\sigma(o)$ in der Färbung f_2 ist.

den *Zyklentyp* von σ. Um den Zusammenhang zu σ zu verdeutlichen, schreiben wir auch $b_i(\sigma)$. Insbesondere muss $b_1 + 2\,b_2 + \cdots + n\,b_n = n$ gelten, da jedes Element von M in genau einem Zyklus vorkommen muss.
Das Polynom

$$Z_G = \frac{1}{|G|} \sum_{\sigma \in G} ZT(\sigma)$$

(das "arithmetische Mittel" der Zyklentypen aller Elemente von G) bezeichnet man auch als den *Zyklenzeiger* von G.
Beispiel: G ist die Gruppe der 12 Permutationen der Ecken eines Tetraeders:

- $4 \cdot 2 = 8$ Drehungen um eine Achse durch einen der vier Eckpunkte um $\pm 120°$ haben den Zyklentyp $x_1 x_3$: ein Einerzyklus – die Ecke auf der Drehachse – und ein Dreierzyklus – die anderen drei Eckpunkte.
- 3 Drehungen um eine Achse durch gegenüberliegende Kantenmitten um $180°$ haben den Zyklentyp x_2^2: die vier Eckpunkte werden durch eine solche Drehung paarweise vertauscht.
- Die identische Bewegung hat den Zyklentyp x_1^4.

Der Zyklenzeiger für diese Situation (TE=Tetraederecken) lautet

$$Z_{TE} = \frac{1}{12}\left(x_1^4 + 3\,x_2^2 + 8\,x_1\,x_3\right)$$

Der Polyasche Abzählsatz

Wir besprechen hier nur die einfachste Form des Polyaschen Abzählsatzes, der den Fall behandelt, wo mit zwei Farben (schwarz und weiß) gefärbt werden soll und die Anzahl schwarz zu färbender Teile vorgegeben ist.
Ist z_i die Anzahl der verschiedenen Färbungen mit genau i schwarzen Teilen und t eine Unbestimmte, so bezeichnen wir

$$\gamma = z_0 + z_1\,t + z_2\,t^2 + \ldots$$

als *Numerator* (oder erzeugende Funktion) der Abzählaufgabe.
In der vorher beschriebenen Situation ($M = \{1, \ldots, n\}$, Symmetriegruppe G als Permutationsgruppe von M, zwei Farben) können wir auch den Zyklenzeiger $Z(x_1, \ldots, x_n)$ berechnen. Zwischen dem Numerator γ_G dieser Abzählaufgabe und dem Zyklenzeiger besteht folgender Zusammenhang

Satz 1 (Polyas Abzählsatz)

$$\gamma_G = Z\left(1 + t, 1 + t^2, \ldots, 1 + t^n\right).$$

Die Anzahl der verschiedenen Färbungen mit genau k schwarzen Objekten bekommt man also als Koeffizient vor t^k, wenn man im Zyklenzeiger für $i = 1, \ldots, n$ die Variable x_i durch $1 + t^i$ ersetzt und das so entstehende Polynom expandiert.

Beweisskizze: Der Beweis beruht auf einer geschickten Formulierung des Abzählproblems und der Regel des doppelten Abzählens.

Für eine Färbung $f \in Map(M, F)$ mit genau k schwarzen Teilen bezeichnen wir mit $w(f) = t^k$ das *Gewicht* dieser Färbung. Die Menge $[f] = \{f \circ \sigma, \sigma \in G\}$ aller zu f äquivalenten Färbungen bezeichnet man als *Orbit* von f. Für den Numerator ergibt sich dann

$$\gamma_G = \sum_f \frac{w(f)}{|[f]|},$$

wobei über *alle* Färbung summiert wird, ohne dass wir uns um Äquivalenz kümmern, aber jede Färbung nur mit einem solchen Bruchteil zählen, dass in der Summe jede Äquivalenzklasse genau mit dem Faktor 1 gezählt wurde ($w(f)$ ist auf allen Färbungen eines Orbits gleich).

Die Größe des Orbits hängt eng mit der Größe des *Stabilisators* $G_f = \{\sigma \in G, f \circ \sigma = f\}$ zusammen. Der Stabilisator enthält alle Permutationen, die eine Färbung f invariant lassen.

Es gilt folgende Beziehung (**Burnside-Lemma**):

$$|G| = |[f]| \cdot |G_f|$$

Beweis: Wir zeigen, dass die Mengen G und $[f] \times G_f$ gleichmächtig sind. Sind $[f] = \{f_1, \ldots, f_k\}$ die zu f äquivalenten Färbungen, $f_i = f \circ \sigma_i$ und $f' = f \circ \tau$ für ein $\tau \in G$, so muss f' mit einem der f_i übereinstimmen:

$$f' = f_i, \text{ also } f \circ \tau = f \circ \sigma_i$$

und folglich $\tau \circ \sigma_i^{-1} \in G_f$. Zu jedem Element $\tau \in G$ können wir also ein Paar $(f_i, \tau \circ \sigma_i^{-1}) \in [f] \times G_f$ angeben. Diese Beziehung ist offensichtlich eineindeutig. $\square$

Für den Numerator ergibt sich damit die Formel

$$\gamma_G = \sum_f \frac{|G_f|}{|G|} w(f) = \frac{1}{|G|} \sum_f |G_f| \, w(f) = \frac{1}{|G|} \sum_{f \in F} \left(\sum_{\sigma \in G} e(f, \sigma) \, w(f) \right),$$

wobei

$$e(f, \sigma) = \begin{cases} 1 & f \circ \sigma = f \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

gesetzt ist. Nun doppeltes Abzählen: $\sum_f \sum_\sigma = \sum_\sigma \sum_f$.

$$\gamma_G = \frac{1}{|G|} \sum_{\sigma \in G} \left(\sum_{f \in F} e(f, \sigma) \, w(f) \right) = \frac{1}{|G|} \sum_{\sigma \in G} \left(\sum_{f \in F^\sigma} w(f) \right),$$

Die Summe im zweiten Summenzeichen geht bei fixierten σ über all diejenigen $f \in M$ mit $e(f, \sigma) = 1$, also über die Menge

$$F^\sigma = \{f \in F, f \circ \sigma = f\}$$

aller unter σ invarianten Färbungen.

σ hat als Permutation eine eindeutige Zerlegung in elementfremde Zyklen. Eine Färbung ist unter σ invariant genau dann, wenn alle Teile innerhalb eines jeden Zyklus von σ die gleiche

Farbe haben. Ein Zyklus der Länge k kann also entweder k weiße oder k schwarze Teile zur Gesamtfärbung beitragen. Der Beitrag zum Numerator ist also 1 (k weiße) + t^k (k schwarze). Ist $(b_1, \ldots, b_n)$ der Zyklentyp von σ, so ist der Beitrag zum Numerator aller Elemente aus F^σ also gerade

$$(1+t)^{b_1(\sigma)} \left(1+t^2\right)^{b_2(\sigma)} \cdot \ldots \cdot (1+t^n)^{b_n(\sigma)},$$

da die Farbe der Zyklen unabhängig voneinander gewählt werden kann (Produktregel). Damit ergibt sich schließlich

$$\gamma_G = Z\left(1+t, 1+t^2, \ldots, 1+t^n\right)$$

Anwendung auf Färbungen platonischer Körper

Als Anwendung soll die folgenden drei Fragestellungen für die verschiedenen platonischen Körper studiert werden:

> Gegeben ist ein platonischer Körper P. Wieviele wesentlich verschiedene Färbungen der Ecken, der Kanten, der Seitenflächen dieses Körpers mit zwei Farben (schwarz und weiß) gibt es, bei denen genau k der Ecken bzw. Kanten bzw. Seitenflächen schwarz gefärbt sind.
>
> Zwei Färbungen heißen dabei *wesentlich verschieden*, wenn sie nicht durch eine Drehung von P ineinander überführt werden können.

Bezeichnet z_k die Zahl der Färbungen mit genau k schwarzen Teilen, so ist also der Numerator

$$\gamma = z_0 + z_1 t + z_2 t^2 + \ldots$$

zu bestimmen. Dazu ist die oben entwickelte Theorie auf die Gruppe der Permutationen der Ecken bzw. Kanten bzw. Seitenflächen von P anzuwenden, jeweils der Zyklenzeiger zu berechnen und daraus der Numerator zu bestimmen. Wir erhalten die Anzahl der möglichen wesentlich verschiedenen Färbungen. Können nun genau so viele (bewiesendermaßen) verschiedene Färbungen angegeben werden, so haben wir einen vollen Satz von Färbungen der gesuchten Art gefunden.
Weitere Details siehe Diplomarbeit von Heike Kühne (PH Erfurt, 1985)

Tetraeder

Die Drehgruppe des Tetraeders besteht aus 12 Elementen (warum?):

- Der identischen Abbildung ι;
- $4 \cdot 2 = 8$ Drehungen um eine dreizählige Achse durch einen der Eckpunkte und die gegenüberliegende Seitenmitte $D_E^{\pm}$;
- 3 Drehungen um eine zweizählige Achse durch gegenüberliegende Kantenmitten D_K.

Diese Drehgruppe induziert Permutationen der Ecken (T_E), Kanten (T_K) und Seitenflächen (T_F) des Tetraeders mit folgenden Zyklentypen:

Element	Anzahl	T_E	T_K	T_F
ι	1	x_1^4	x_1^6	x_1^4
$D_E^{\pm}$	8	$x_1 x_3$	x_3^2	$x_1 x_3$
D_K	3	x_2^2	$x_1^2 x_2^2$	x_2^2

Als Zyklenzeiger ergeben sich für die drei Abzählaufgaben[2]

$$\begin{aligned} Z_{TE} = Z_{TF} = &\ \frac{1}{12}\left(x_1^4 + 8\,x_1\,x_3 + 3\,x_2^2\right) \\ Z_{TK} = &\ \frac{1}{12}\left(x_1^6 + 8\,x_3^2 + 3\,x_1^2\,x_2^2\right) \end{aligned}$$

und daraus als Numeratoren

$$\begin{aligned} \gamma_{TE} = \gamma_{TF} = &\ t^4 + t^3 + t^2 + t + 1 \\ \gamma_{TK} = &\ t^6 + t^5 + 2\,t^4 + 4\,t^3 + 2\,t^2 + t + 1 \end{aligned}$$

Würfel und Oktaeder

Würfel und Oktaeder sind zueinander dual: Die Mittelpunkte der Seitenflächen eines Würfels bilden ein Oktaeder und umgekehrt. Deshalb haben beide Körper dieselbe Drehgruppe und es gibt eine eineindeutige Korrespondenz zwischen den Eckenfärbungen des Würfels und den Seitenfärbungen des Oktaeders usw., d.h. es gilt $Z_{OE} = Z_{WF}, Z_{OK} = Z_{WK}, Z_{OF} = Z_{WE}$. Wir beschränken die Betrachtungen deshalb auf den Fall des Würfels.

Die Drehgruppe des Würfels besteht aus 24 Elementen (warum?):

- Der identischen Abbildung ι;
- $4 \cdot 2 = 8$ Drehungen um eine dreizählige Achse durch zwei diametral gegenüberliegende Eckpunkte (Raumdiagonale) $D_E^{\pm}$;
- $3 \cdot 3 = 9$ Drehungen um eine vierzählige Achse durch zwei gegenüberliegende Seitenmitten $D_F^{\pm}$ ($\pm 90°$) und D_F^0 (um $180°$);
- 6 Drehungen um eine zweizählige Achse durch gegenüberliegende Kantenmitten D_K.

Diese Drehgruppe induziert Permutationen der Ecken (W_E), Kanten (W_K) und Seitenflächen (W_F) des Würfels mit folgenden Zyklentypen:

Element	Anzahl	W_E	W_K	W_F
ι	1	x_1^8	x_1^{12}	x_1^6
$D_E^{\pm}$	8	$x_1^2 x_3^2$	x_3^4	x_3^2
$D_F^{\pm}$	6	x_4^2	x_4^3	$x_1^2 x_4$
D_F^0	3	x_2^4	x_2^6	$x_1^2 x_2^2$
D_K	6	x_2^4	$x_1^2 x_2^5$	x_2^3

[2] $Z_{TE} = Z_{TF}$ ist auch wegen der Selbstdualität des Tetraeders klar: Die Seitenmitten eines Tetraeders bilden selbst wieder ein Tetraeder, was eine eineindeutige Beziehung zwischen den Ecken- und den Flächenfärbungen des Tetraeders vermittelt.

Als Zyklenzeiger ergeben sich für die drei Abzählaufgaben

$$Z_{WE} = \frac{1}{24}\left(x_1^8 + 8\,x_1^2\,x_3^2 + 6\,x_4^2 + 9\,x_2^4\right)$$
$$Z_{WK} = \frac{1}{24}\left(x_1^{12} + 8\,x_3^4 + 6\,x_4^3 + 3\,x_2^6 + 6\,x_1^2\,x_2^5\right)$$
$$Z_{WF} = \frac{1}{24}\left(x_1^6 + 8\,x_3^2 + 6\,x_1^2\,x_4 + 3\,x_1^2\,x_2^2 + 6\,x_2^3\right)$$

und daraus als Numeratoren

$$\gamma_{WE} = t^8 + t^7 + 3\,t^6 + 3\,t^5 + 7\,t^4 + 3\,t^3 + 3\,t^2 + t + 1$$
$$\gamma_{WK} = t^{12} + t^{11} + 5\,t^{10} + 13\,t^9 + 27\,t^8 + 38\,t^7 + 48\,t^6 + 38\,t^5 + 27\,t^4 + 13\,t^3 + 5\,t^2 + t + 1$$
$$\gamma_{WF} = t^6 + t^5 + 2\,t^4 + 2\,t^3 + 2\,t^2 + t + 1$$

Dodekaeder und Ikosaeder

Ähnlich wie Würfel und Oktaeder sind auch Dodekaeder aund Ikosaeder zueinander dual. Wir können uns deshalb auch hier auf die Betrachtung der Färbungsabzählaufgabe für einen der beiden Körper beschränken.
Die Drehgruppe des Ikosaeders besteht aus 60 Elementen (warum?):

- Der identischen Abbildung ι;
- $6 \cdot 4 = 24$ Drehungen um eine fünfzählige Achse durch zwei diametral gegenüberliegende Eckpunkte (Raumdiagonale) $D_E^{\pm}$;
- $10 \cdot 2 = 20$ Drehungen um eine dreizählige Achse durch zwei gegenüberliegende Seitenmitten $D_F^{\pm}$;
- 15 Drehungen um eine zweizählige Achse durch gegenüberliegende Kantenmitten D_K.

Diese Drehgruppe induziert Permutationen der Ecken (I_E), Kanten (I_K) und Seitenflächen (I_F) des Ikosaeders mit folgenden Zyklentypen:

Element	Anzahl	I_E	I_K	I_F
ι	1	x_1^{12}	x_1^{30}	x_1^{20}
$D_E^{\pm}$	24	$x_1^2 x_5^2$	x_5^6	x_5^4
$D_F^{\pm}$	20	x_3^4	x_3^{10}	$x_1^2 x_3^6$
D_K	15	x_2^6	$x_1^2 x_2^{14}$	x_2^{10}

Als Zyklenzeiger ergeben sich für die drei Abzählaufgaben

$$Z_{IE} = \frac{1}{60}\left(x_1^{12} + 24\,x_1^2\,x_5^2 + 20\,x_3^4 + 15\,x_2^6\right)$$
$$Z_{IK} = \frac{1}{60}\left(x_1^{30} + 24\,x_5^6 + 20\,x_3^{10} + 15\,x_1^2\,x_2^{14}\right)$$
$$Z_{IF} = \frac{1}{60}\left(x_1^{20} + 24\,x_5^4 + 20\,x_1^2\,x_3^6 + 15\,x_2^{10}\right)$$

und daraus als Numeratoren

$$\begin{aligned}
\gamma_{IE} = {} & t^{12} + t^{11} + 3\,t^{10} + 5\,t^{9} + 12\,t^{8} + 14\,t^{7} + 24\,t^{6} + 14\,t^{5} + 12\,t^{4} + 5\,t^{3} + 3\,t^{2} + t + 1 \\
\gamma_{IK} = {} & t^{30} + t^{29} + 11\,t^{28} + 78\,t^{27} + 483\,t^{26} + 2423\,t^{25} + 10025\,t^{24} + 34112\,t^{23} + 97890\,t^{22} \\
& + 238993\,t^{21} + 501507\,t^{20} + 911456\,t^{19} + 1442875\,t^{18} + 1997499\,t^{17} \\
& + 2425320\,t^{16} + 2587100\,t^{15} + 2425320\,t^{14} + 1997499\,t^{13} + 1442875\,t^{12} \\
& + 911456\,t^{11} + 501507\,t^{10} + 238993\,t^{9} + 97890\,t^{8} + 34112\,t^{7} \\
& + 10025\,t^{6} + 2423\,t^{5} + 483\,t^{4} + 78\,t^{3} + 11\,t^{2} + t + 1 \\
\gamma_{IF} = {} & t^{20} + t^{19} + 6\,t^{18} + 21\,t^{17} + 96\,t^{16} + 262\,t^{15} + 681\,t^{14} + 1302\,t^{13} + 2157\,t^{12} \\
& + 2806\,t^{11} + 3158\,t^{10} + 2806\,t^{9} + 2157\,t^{8} + 1302\,t^{7} + 681\,t^{6} + 262\,t^{5} \\
& + 96\,t^{4} + 21\,t^{3} + 6\,t^{2} + t + 1
\end{aligned}$$

Attribution Section

graebe (2005-07-24):
Der erste Teil dieses Materials wurde für die Projektarbeit in Klasse 11/12 fürs Mathelager 2005 in Ilmenau erstellt und dort zusammen mit Teilen der Diplomarbeit von Heike Kühne eingesetzt. Der zweite Teil (Färbungen der regulären Polyeder) ist noch in kursorischer Form.