Ortslinien in der Geometrie
Arbeitsmaterial für Klasse 7

Hans-Gert Gräbe, Leipzig

Ortslinien haben eine große Bedeutung in der Geometrie, da sie es erlauben, logische Bedingungen in geometrische Aussagen zu verwandeln und umgekehrt. So kann man etwa die Aussage

X ist von A und B gleichweit entfernt

umformulieren zu

X liegt auf der Mittelsenkrechten der Strecke $\overline{AB}$,

denn die Mittelsenkrechte ist gerade der entsprechende geometrische Ort.

Soll ein Punkt X mehrere Bedingungen erfüllen (wie z.B. in einer Konstruktionsaufgabe), so ergibt sich aus der Umformulierung in die Sprache der geometrischen Orte, dass X der Schnittpunkt der entsprechenden Linien ist, was man oft zu dessen Konstruktion verwenden kann.

Aufgabe 1 Konstruiere ein Dreieck $\triangle ABC$, von dem die Länge c der Seite AB, die Größe α des Winkels $\angle CAB$ und die Länge R des Umkreisradius gegeben sind.

Lösung: Wir beginnen mit der Seite $\overline{AB}$, die wir entsprechend der vorgegebenen Länge zeichnen. Der fehlende Punkt C wird durch zwei Bedingungen bestimmt: $|\angle CAB| = \alpha$ und die Größe R des Umkreisradius. Die zugehörigen geometrischen Orte sind der Schenkel eines Winkels und eine Kreislinie. Den Schenkel des Winkels kann man sofort konstruieren, indem man α an der Seite $\overline{AB}$ in A abträgt. Etwas schwieriger wird es mit dem Umkreis, von dem wir wissen, dass er durch A, B geht und den Radius R hat. Wo liegt sein Mittelpunkt M ? Antwort, wieder mit Ortslinien: M ist erstens von A, B gleichweit entfernt (liegt also auf der Mittelsenkrechten der Strecke $\overline{AB}$) und zweitens gilt $|AM| = R$, d.h. M liegt auf dem Kreis um A mit dem Radius R. Damit bekommen wir M als Schnitt der beiden genannten Linien. Nun können wir den Umkreis des gesuchten Dreiecks zeichnen und finden schließlich C als Schnittpunkt des Schenkels des in A angetragenen Winkels und des Umkreises.

Aufgabe 2 Beachte, dass die Lösung nicht eindeutig ist. Wieviel zueinander nicht kongruente Lösungen hat die Aufgabe? An welcher Stelle muss man genauer argumentieren, um diese weiteren Lösungen nicht zu übersehen.

Umgekehrt kann man in geometrischen Beweisen, in denen Linien vorkomemn, die geometrische Orte sind, oft die logischen Eigenschaften verwenden, die sich mit ihnen verbinden. Erinnern wir uns an den

Satz 1 (Satz vom Schnittpunkt der Mittelsenkrechten) *In jedem Dreieck gehen die drei Mittelsenkrechten durch einen gemeinsamen Punkt, den Umkreismittelpunkt des Dreiecks.*

und dessen Beweis: Sei M der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten auf $\overline{AB}$ und $\overline{AC}$. Weil M auf der Mittelsenkrechten von $\overline{AB}$ liegt, ist er von A und B gleichweit entfernt, d.h. $|AM| = |BM|$. Weil M auf der Mittelsenkrechten von $\overline{AC}$ liegt, ist er von A und C gleichweit entfernt, d.h. $|AM| = |CM|$. Damit ist auch $|BM| = |CM|$ und folglich liegt M auf der Mittelsenkrechten der Strecke $\overline{BC}$. Daraus folgen alle getroffenen Aussagen unmittelbar.

Du siehst also, dass der Wechsel zwischen logischer und geometrischer Formulierung desselben Sachverhalts in vielen Aufgabenstellungen hilfreich ist. Eine **Aufstellung aus der Schule bekannter geometrischer Ortslinien** wäre hier noch zu ergänzen.

Wie findet man eine Ortslinie ?

Die folgenden Regeln helfen oft, eine passende Ortslinie zu finden:

1. Suche zuerst nach einzelnen Punkten, die auf der Ortslinie liegen müssen.
2. Stelle eine Vermutung über die Art der Ortslinie auf (meist sind es Geraden oder Kreise; sonst kann man damit wenig anfangen).
3. Und zuletzt: Beweise Deine Vermutung.

Attribution Section

graebe (2004-09-02):
Dieses Material wurde vor einiger Zeit als Begleitmaterial für den LSGM-Korrespondenzzirkel in der Klasse 7 erstellt und nun nach den Regeln der KoSemNet-Literatursammlung aufbereitet.