Aussagenlogik
Arbeitsmaterial für Klasse 7

Hans-Gert Gräbe, Leipzig

In vielen Aufgaben spielen Aussagekombinationen eine Rolle, von denen darüberhinaus gesagt wird, dass einige falsch und andere richtig sein sollen. Hier ist es oftmals sinnvoll, zuerst die Aussagen in solche zu transformieren, die alle wahr sind. Dazu ist meist eine Fallunterscheidung sinnvoll, wie etwa in der folgenden

> Aufgabe 240631: Drei Schüler Wolfgang, Ralph und Udo belegten bei einem Sportfest die ersten drei Plätze im Weitsprung. Marcus, der in einer anderen Disziplin starten musste, erkundigte sich hinterher bei Elke nach dem Ausgang beim Weitsprung. Elke konnte sich nicht mehr genau erinnern und sagte: „Ich glaube
> (a) Wolfgang wurde nicht Erster,
> (b) Ralph wurde nicht Zweiter, sondern
> (c) Udo wurde Zweiter.“
>
> Es stellte sich heraus, dass Elke einmal etwas richtiges gesagt hatte, sich aber in den beiden anderen Fällen geirrt hatte. Was kann man über die Reihenfolge sagen?

Um diese Aufgabe zu lösen, müssen wir die Aussagen (a), (b) und (c) entsprechend ihres (uns nicht genau bekannten) Wahrheitsgehalts kombinieren. Jede der einzelnen Aussagen kann wahr oder falsch sein (im letzteren Fall ist das Gegenteil wahr), und Aussagen können gemeinsam (**und**-verknüpft) oder alternativ (**oder**-verknüpft).

Um in solchen Aussagekombinationen nicht die Übersicht zu verlieren, wollen auch wir die folgende in der Mathematik übliche Notation verwenden. Für zwei Aussagen (A) und (B) gibt es die folgenden wichtigen Aussagekombinationen:

Zeichen	Bedeutung	wie das die Mathematiker nennen
$\neg(A)$	nicht (A)	Negation der Aussage (A)
$(A) \wedge (B)$	(A) und (B)	konjunktive Verknüpfung
$(A) \vee (B)$	(A) oder (B)	disjunktive Verknüpfung

Beachte, dass „(A) oder (B)“ den Fall „(A) und (B)“ einschließen (inklusives oder) oder ausschließen kann (exklusives oder). Die Mathematiker haben sich darauf geeinigt, dass immer das inklusive „oder“ gemeint ist, wenn nichts anderes gesagt wird. An diese vereinbarung werden wir uns natürlich auch halten.

Kehren wir zur Analyse von Elkes Aussage zurück. Wir unterscheiden drei Fälle, je nachdem, ob (a), (b) oder (c) wahr sind. Unter Verwendung der eben eingeführten Symbole und der Buchstaben W, R, U für den Platz des jeweilgen Sportlers lauten die Aussagen für die drei Fälle

$$\text{(a) wahr:} \quad (W \neq 1) \wedge (R = 2) \wedge (U \neq 2) \tag{1}$$
$$\text{(b) wahr:} \quad (W = 1) \wedge (R \neq 2) \wedge (U \neq 2) \tag{2}$$
$$\text{(c) wahr:} \quad (W = 1) \wedge (R = 2) \wedge (U = 2) \tag{3}$$

Wir sehen, dass Fall (2) (kein zweiter Platz) und Fall (3) (zwei zweite Plätze) ausscheiden. Im Fall (1) schließen wir nacheinander $R = 2$, wegen $W \neq 1$ dann $W = 3$ und $U = 1$. Das wäre die einzig mögliche Platzverteilung im Fall (1). Nun muss noch geprüft werden, ob diese Möglichkeit auch keine der Bedingungen verletzt, also die Probe gemacht werden! Das ist hier sehr einfach, deshalb wollen wir es so formulieren:

Die Probe zeigt, dass es sich wirklich um eine Lösung handelt.

Also nicht zu früh gefreut: „Hurra, das ist die Lösung“, denn es könnte ja sein, dass das gefundene Ergebnis an einer Stelle, die noch nicht beachtet wurde, ebenfalls nicht passt und die Aufgabe gar keine Lösung besitzt.

Eine andere Lösung könnte 6 Fälle unterscheiden, nämlich die 6 möglichen Reihenfolgen, und untersuchen, welche der Aussagen wahr bzw. falsch sind:

W	R	U	(1)	(2)	(3)
1	2	3	f	f	f
1	3	2	f	w	w
2	1	3	w	w	f
2	3	1	w	w	f
3	1	2	w	w	w
3	2	1	w	f	f

Nur im letzten Fall sind genau zwei der Aussagen falsch. Eine Probe ist in diesem Fall **nicht** notwendig, denn wir haben ja eine vollständige Fallunterscheidung durchgeführt, d.h. in *jedem* Fall *alle* Bedingungen geprüft.

Aussagekombinationen lassen sich nach einfachen Regeln umformen. Die wichtigsten sind die folgenden **de'Morgan-schen Regeln**:

Regel	Interpretation
$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A) \vee (\neg B)$	Das Gegenteil von „A **und** B“ ist „nicht A **oder** nicht B“.
$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A) \wedge (\neg B)$	Das Gegenteil von „A **oder** B“ ist „nicht A **und** nicht B“.

Beispiel: „$(a = 2)$ **und** $(b \neq 3)$ ist falsch“ heißt „$(a \neq 2)$ **oder** $(b = 3)$“.

Attribution Section

graebe (2004-09-02):
Dieses Material wurde vor einiger Zeit als Begleitmaterial für den LSGM-Korrespondenzzirkel in der Klasse 7 erstellt und nun nach den Regeln der KoSemNet-Literatursammlung aufbereitet.