Berechnung des größten gemeinsamen Teilers (ggT) mit dem Euklidschen Algorithmus Arbeitsmaterial für Klasse 7

Hans-Gert Gräbe, Leipzig

Das hier besprochene Verfahren basiert auf dem *Satz von der Division mit Rest*:

Satz 1 *Zu zwei positiven natürlichen Zahlen a, b gibt es eindeutig bestimmte natürliche Zahlen q, r mit $0 \leq r < b$, so dass*

$$a = q \cdot b + r$$

gilt. q nennt man den **Quotienten** *und r den* **Rest** *bei Division von a durch b.*

Die beiden Größen q und r kann man leicht bestimmen: q ist gerade der Vorkommaanteil, wenn man die Division a/b auf dem Taschenrechner ausführt. Die Mathematiker haben für diesen Vorkommateil einer (positiven reellen) Kommazahl x das spezielle Symbol $[x]$ eingeführt (sprich: der ganze Teil von x). Wir können also schreiben

$$q := \left[\frac{a}{b}\right].$$

Der Rest r ergibt sich dann eindeutig aus der Beziehung

$$r := a - q \cdot b,$$

was man wieder auf dem Taschenrechner ausrechnen kann.

Weil beide Funktionen so einfach sind, spielen sie auch in Computern und Programmiersprachen eine wichtige Rolle. In Pascal kann man z.B. q und r mit den Funktionen `q:=a div b` und `r:=a mod b` berechnen und damit den Euklidschen Algorithmus sehr einfach programmieren.

Zur ggT-Berechnung verwenden wir die folgende wichtige Eigenschaft, die a, b und r verbindet: Es gilt $\mathrm{ggT}(a, b) = \mathrm{ggT}(b, r)$. Warum gilt diese Beziehung? Betrachten wir die Relation $a = q\,b + r$, so sehen wir, dass *jeder* gemeinsame Teiler von a und b auch ein Teiler von r ist und umgekehrt jeder gemeinsame Teiler von b und r auch ein gemeinsamer Teiler von a ist. Die *Mengen* der gemeinsamen Teiler von a und b bzw. von b und r stimmen also überein und damit auch der *größte* gemeinsame Teiler.

Betrachten wir nun ein Beispiel. Wir wollen $\mathrm{ggT}(99, 69)$ berechnen. Nach dem aus der Schule bekannten Verfahren würden wir dazu jede der beiden Zahlen in Faktoren

$$99 = 3^2 \cdot 11, \quad 69 = 3 \cdot 23$$

zerlegen und gewännen durch Vergleich der Exponenten die Antwort $ggT = 3$.

Stattdessen können wir auch fortgesetzte Division mit Rest anwenden:

$$\begin{aligned}
99 &= 1 \cdot 69 + 30, &&\text{also gilt} \quad \mathrm{ggT}(99, 69) = \mathrm{ggT}(69, 30)\\
69 &= 2 \cdot 30 + 9, &&\text{also gilt} \quad \mathrm{ggT}(69, 30) = \mathrm{ggT}(30, 9)\\
30 &= 3 \cdot 9 + 3, &&\text{also gilt} \quad \mathrm{ggT}(30, 9) = \mathrm{ggT}(9, 3)\\
9 &= 3 \cdot 3, &&\text{also gilt} \quad \mathrm{ggT}(9, 3) = 3,
\end{aligned}$$

denn die letzte Division geht ja auf. Setzen wir die Beziehungen, die jeweils hinter den Worten „also gilt“ stehen, zusammen, so erhalten wir schließlich $\mathrm{ggT}(99, 69) = 3$. Dieses Verfahren der fortgesetzten Division mit Rest bezeichnet man als den **Euklidschen Algorithmus**. Da die Reste in jedem Schritt kleiner werden, landen wir nach endlicher Zeit *immer* bei einer Division mit Rest 0.

Beachte, dass wir bei den Rechnungen keine Zerlegung in Faktoren verwendet haben. In einfachen Beispielen wie dem hier betrachteten ist eine solche Zerlegung schnell zu finden. Allgemein muss man dafür aber ziemlichen Aufwand betreiben.

Aufgabe 1 Bestimme $\mathrm{ggT}(2021027, 3028009)$. Versuche, eine Zerlegung in Faktoren zu finden, ohne das Ergebnis unserer weiteren Rechnung zu betrachten.

Der Euklidsche Algorithmus, den man bei diesen Zahlen noch ohne Probleme mit dem Taschenrechner bewältigen kann, liefert nacheinander

$$\begin{aligned}
3028009 =& 1 \cdot 2021027 + 1006982,\\
& \text{also } \mathrm{ggT}(3028009, 2021027) = \mathrm{ggT}(2021027, 1006982)\\
2021027 =& 2 \cdot 1006982 + 7063,\\
& \text{also } \mathrm{ggT}(2021027, 1006982) = \mathrm{ggT}(1006982, 7063)\\
1006982 =& 142 \cdot 7063 + 4036,\\
& \text{also } \mathrm{ggT}(1006982, 7063) = \mathrm{ggT}(7063, 4036)\\
7063 =& 1 \cdot 4036 + 3027,\\
& \text{also } \mathrm{ggT}(7063, 4036) = \mathrm{ggT}(4036, 3027)\\
4036 =& 1 \cdot 3027 + 1009,\\
& \text{also } \mathrm{ggT}(4036, 3027) = \mathrm{ggT}(3027, 1009)\\
3027 =& 3 \cdot 1009,\\
& \text{also } \mathrm{ggT}(3027, 1009) = 1009
\end{aligned}$$

Mit Hilfe des Euklidschen Algorithmus kann man sogar ganze Klassen von Aufgaben wie zum Beispiel die folgende lösen:

Aufgabe 2 Untersuche, welchen größten gemeinsamen Teiler die Zahlen $2n + 3$ und $3n + 2$ für verschiedene natürliche Zahlen n haben.

Um uns ein Gefühl für die Aufgabenstellung zu verschaffen, wollen wir zuerst einmal den ggT für einige Werte von n bestimmen. Die entsprechenden Aufgaben und Lösungen lauten ($n = 0, \ldots, 10$):

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{ggT}(3,2) = 1, & \mathrm{ggT}(5,5) = 5, & \mathrm{ggT}(7,8) = 1 \\ \mathrm{ggT}(9,11) = 1, & \mathrm{ggT}(11,14) = 1, & \mathrm{ggT}(13,17) = 1 \\ \mathrm{ggT}(15,20) = 5, & \mathrm{ggT}(17,23) = 1, & \mathrm{ggT}(19,26) = 1 \\ \mathrm{ggT}(21,29) = 1, & \mathrm{ggT}(23,32) = 1 & \end{array}$$

Wir erkennen, dass die beiden Zahlen meist teilerfremd sind, aber manchmal auch einen gemeinsamen Teiler 5 haben.

Der Euklidsche Algorithmus hilft uns weiter, diese Beobachtung in eine Gesetzmäßigkeit zu gießen: Egal, welchen Wert die Zahl n annimmt, es gilt immer

$$\begin{array}{rcc} 3n + 2 = 1 \cdot (2n + 3) + (n - 1), & \text{also} & \mathrm{ggT}(3n + 2, 2n + 3) = \mathrm{ggT}(2n + 3, n - 1) \\ 2n + 3 = 2 \cdot (n - 1) + 5, & \text{also} & \mathrm{ggT}(2n + 3, n - 1) = \mathrm{ggT}(n - 1, 5) \end{array}$$

Das ist zwar nicht genau der Euklidsche Algorithmus, denn für $n = 3$ steht etwa in der zweiten Zeile $9 = 2 \cdot 2 + 5$ und nicht $9 = 4 \cdot 2 + 1$. Aber die Tatsache, dass $r < b$ sein soll, haben wir ja beim Beweis, dass $\mathrm{ggT}(a, b) = \mathrm{ggT}(b, r)$ gilt, nicht verwendet, sondern erst, als es darum ging, zu zeigen, dass der Euklidsche Algorithmus immer auf eine exakte Division stößt und damit terminiert. Wir können also für unsere Aufgabe wenigstens sagen, dass für jedes n

$$\mathrm{ggT}(3n + 2, 2n + 3) = \mathrm{ggT}(n - 1, 5)$$

gilt. Da 5 aber nur die Teiler 1 und 5 hat, erkennen wir: Wenn $n - 1$ nicht durch 5 teilbar ist, dann sind die beiden Ausgangszahlen teilerfremd. Ist dagegen $n - 1$ durch 5 teilbar, so ist der gesuchte $ggT = 5$. Die Antwort lautet also

$$\mathrm{ggT}(3n + 2, 2n + 3) = \begin{cases} 5 & \text{wenn } 5 \mid n - 1 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

Attribution Section

graebe (2004-09-02):
Dieses Material wurde vor einiger Zeit als Begleitmaterial für den LSGM-Korrespondenzzirkel in der Klasse 7 erstellt und nun nach den Regeln der KoSemNet-Literatursammlung aufbereitet.