Mathematische Aussagen und mathematische Beweise
Arbeitsmaterial für Klasse 7

Hans-Gert Gräbe, Leipzig

In diesem Material geht es schwerpunktmäßig darum, wie mathematische Aussagen bewiesen werden und wie solche Beweise aufzuschreiben sind.
Mathematische Sätze bestehen in der Regel aus zwei Teilen, der *Voraussetzung* und der *Behauptung* und haben die allgemeine Gestalt

`Wenn` die Voraussetzung erfüllt ist, `dann` gilt auch die Behauptung.

Mathematische Sätze werden oft direkt mit diesen Worten formuliert:

> `Wenn` *eine Zahl durch 9 teilbar ist,* `dann` *ist sie auch durch 3 teilbar.*
>
> `Wenn` *zwei Dreiecke in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel übereinstimmen,* `dann` *sind sie kongruent.*

Aber auch anders formulierte Sätze kann man so umformulieren:

> *Die Innenwinkelsumme im Dreieck beträgt* 180^o*.*
>
> > `Wenn` *man die Winkelgrößen der drei Innenwinkel eines Dreiecks addiert,* `dann` *erhält man* 180^o*.*
>
> *Stufenwinkel an geschnittenen Parallelen sind gleichgroß.*
>
> > `Wenn` *zwei Winkel Stufenwinkel an geschnittenen Parallelen sind,* `dann` *sind sie gleichgroß.*

Dasselbe gilt für Aufgaben wie sie etwa bei der Matheolympiade gestellt werden. Statt

> Gegeben sei …(V)… Beweise, dass dann …(B)… gilt.

kann man auch

> `Wenn` …(V)… erfüllt ist, `dann` gilt auch …(B)…

schreiben.

Aussagen dieser Art bezeichnet man als *Implikation* und schreibt auch kurz $(V) \Rightarrow (B)$, wenn man die Struktur der Aussage besonders betonen will. Hierbei stehen (V) und (B) als Kurzzeichen für die jeweilige konkrete Voraussetzung bzw. Behauptung.

Eine zweite wichtige Aussageform ist die *Äquivalenz*, die in dieser allgemeinen Notation die Form

(V) gilt `genau dann, wenn` (B) gilt.

hat. Sie enthält einen Satz zusammen mit seiner Umkehrung, denn man kann eine Äquivalenz umformulieren zu den beiden Aussagen

`Wenn` (V) gilt, `dann` gilt auch (B)

und

`Wenn` (B) gilt, `dann` gilt auch (V).

Für eine solche Äquivalenz schreiben wir auch kurz $(V) \Leftrightarrow (B)$, denn sie bedeutet $(V) \Rightarrow (B)$ **und** $(B) \Rightarrow (V)$.

Zum Beweisen mathematischer Sätze

Wir hatten gesehen, dass mathematische Sätze wie kleine Bausteine beschaffen sind, mit denen man die Verbindung zwischen zwei Aussagen (V) und (B) herstellen kann. Wir können uns deshalb die Mathematik als eine Welt kleiner Inseln, der verschiedenen Aussagen, vorstellen, die durch Brücken, die Sätze, miteinander verbunden werden können. Einen Satz (wie etwa Aufgabe 1) zu beweisen bedeutet deshalb zuerst einmal, einen solchen Weg aus verschiedenen Brücken zu finden. Dieser Weg startet auf der Insel (V) und muss auf der Insel (B) enden. Als Brücken können wir nur bereits bekannte Sätze verwenden. Einen solchen Weg bezeichnet man als *Schlusskette*.
Betrachten wir dazu die folgenden zwei Aufgaben:

> *Beweise den folgenden Satz: Es gibt keine Quadratzahl n, die bei Division durch 3 den Rest 2 lässt.*

Aufgabe 1 Formuliere diesen Satz als Wenn-Dann-Aussage.

Beweis: n ist eine Quadratzahl $n = m^2$, wobei sich m in der Form $m = 3k$ oder $m = 3k + 1$ oder $m = 3k + 2$ darstellen lässt (je nachdem, welchen Rest m bei Division druch 3 lässt).
1. Fall: Ist $m = 3k$, so lässt $n = m^2 = 9k^2$ bei Division durch 3 den Rest 0.
2. Fall: Ist $m = 3k+1$, so lässt $n = m^2 = 9k^2 + 6k + 1 = 3 \cdot (3k^2 + 2k) + 1$ bei Division durch 3 den Rest 1.
3. Fall: Ist $m = 3k + 2$, so lässt $n = m^2 = 9k^2 + 12k + 4 = 3 \cdot (3k^2 + 4k + 1) + 1$ bei Division durch 3 ebenfalls den Rest 1. $\square$
Diese Art des Beweises nennt man *Beweis durch vollständige Fallunterscheidung*. Wir haben von unserer Insel Brücken zu *allen* Nachbarinseln gebaut und von jeder aus einen Weg zu (B) gefunden.

Beweise, dass für positive reelle Zahlen a, b stets $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$ gilt.

Beweis: Wir formen die Ungleichung

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2 \tag{1}$$

um, zuerst durch Multiplikation mit ab zu

$$a^2 + b^2 \geq 2ab \tag{2}$$

und schließlich durch Subtraktion von $2ab$ und Umformen zu

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2 \geq 0. \tag{3}$$

Da das Quadrat einer reellen Zahl stets nichtnegativ ist, haben wir einen Weg zu sicherem Festland gefunden. Allerdings haben wir den Weg vom „falschen“ Ende her gebaut, denn wir sind bei der Behauptung gestartet. Unsere Schlusskette war (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3). Diese Art des Suchens nach einem Beweis bezeichnet man als *Rückwärtsarbeiten*.

Nachdem eine solche Straße aus mehreren Brücke gebaut, d.h. ein möglicher Beweisweg gefunden ist, müssen wir nun prüfen, ob es sich auch wirklich um einen Beweis handelt, denn Implikationen $(A_1) \Rightarrow (A_2)$ sind *Einbahnstraßen*-Brücken. Wir müssen also prüfen, ob unsere Brücken auch so zusammenpassen, dass man von (V) nach (B) gelangen kann, d.h. ob die Implikationen $(V) = (3) \Rightarrow (2) \Rightarrow (1) = (B)$ ebenfalls gelten. Das ist aber offensichtlich der Fall, weil alle Umformungen rückgängig gemacht werden können, d.h wir *äquivalent* umgeformt haben. $\square$

Für den eigentlichen Beweis hätte es ausgereicht, die Beweiskette $(V) = (3) \Rightarrow (2) \Rightarrow (1) = (B)$ aufzuschreiben. Diese Richtung nennt man *Vorwärtsarbeiten*. Oft, insbesondere bei geometrischen Aufgaben, ist es zum Finden eines Beweisweges nützlich, zwischen Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten zu wechseln, also viele Brücken an verschiedenen Stellen zu bauen, um einen Weg von der Voraussetzung zur Behauptung zu finden. Für den gefundenen Weg muss aber stets geprüft werden, ob die gebauten Brücken in der richtigen Richtung durchlässig sind!

Ähnlich ist auch bei mathematischen *Bestimmungsaufgaben* vorzugehen. Der einzige Unterschied besteht darin, dass (B) in diesem Fall keine Aussage, sondern eine Bestimmungsfrage ist, die auf die Ermittlung einer Lösungsmenge hinausläuft.

Attribution Section

graebe (2004-09-02):
Dieses Material wurde vor einiger Zeit als Begleitmaterial für den LSGM-Korrespondenzzirkel in der Klasse 7 erstellt und nun nach den Regeln der KoSemNet-Literatursammlung aufbereitet.