Bewegungsgeometrie

Hans-Gert Gräbe, Leipzig

23. Januar 2000

Geometrische Argumentationen verwenden an vielen Stellen Kongruenzaussagen, die gewöhnlich mit verschiedenen Kongruenzsätzen begründet werden. Bekanntlich heißen zwei geometrische Figuren *kongruent*, wenn es eine Bewegung gibt, die die eine Figur mit der anderen zur Deckung bringt.

In diesem Beitrag soll an einigen Beispielen aufgezeigt werden, wie für Kongruenzaussagen direkt mit solchen Deckbewegungen argumentiert werden kann.

Aufgabe 1 Konstruieren Sie ein gleichseitiges Dreieck ABC, dessen Eckpunkte auf drei vorgegebenen parallelen Geraden g_A, g_B, g_C liegen.

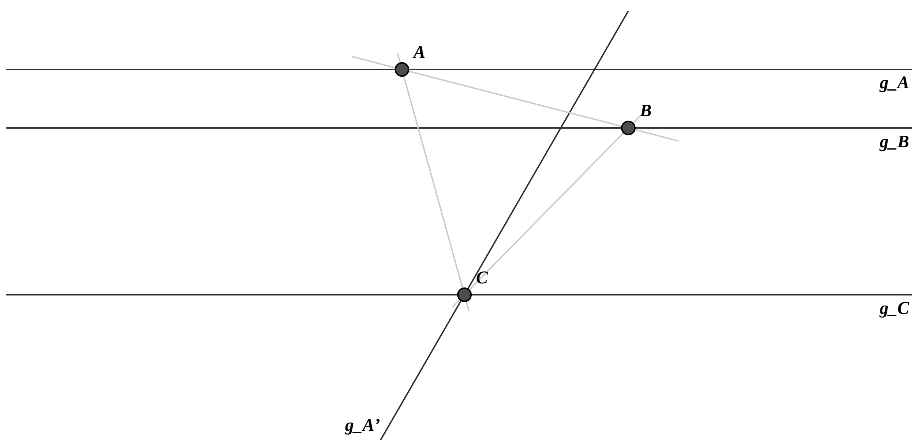

Bild 1: Konstruktion des Dreiecks ABC

Wegen der Translationsinvarianz kann man einen der Eckpunkte, etwa B, auf seiner Geraden beliebig wählen. Sei nun ABC ein Dreieck mit den geforderten Eigenschaften. Dreht man die Ebene in B um $60°$, so geht A in C über. C muss also auf g_C und der Bildgeraden g'_A liegen, die man aus g_A durch die Drehung erhält. Da g'_A nicht parallel zu g_C verläuft, ist C bei fixiertem B als Schnittpunkt dieser beiden Geraden eindeutig bestimmt.

Ein Dreieck mit den geforderten Eigenschaften kann man also wie folgt konstruieren:

(1) Wähle $B \in g_B$ beliebig aus.

(2) Konstruiere das Bild g'_A von g_A bei Drehung um 60° mit Zentrum B. (Wähle dazu zwei Punkte auf der Originalgeraden, konstruiere deren Bilder und verbinde diese zur Bildgeraden).

Der Schnittpunkt von g'_A und g_C ist C.

(3) Der dritte Eckpunkt A ist der Schnittpunkt von g_A mit der Mittelsenkrechten auf $\overline{BC}$.

Aus unseren bisherigen Betrachtungen ergibt sich, dass das so konstruierte Dreieck ABC die Bedingungen der Aufgabenstellung erfüllt und umgekehrt jedes solche Dreieck auch auf diese Weise konstruiert werden kann. Bei fixiertem B erhalten wir zwei Lösungen, da man die Drehung um 60° mit Zentrum B in *zwei* Richtungen ausführen kann. Die beiden Lösungen liegen symmetrisch bzgl. einer Achse durch B, die senkrecht zu den drei parallelen Geraden verläuft.

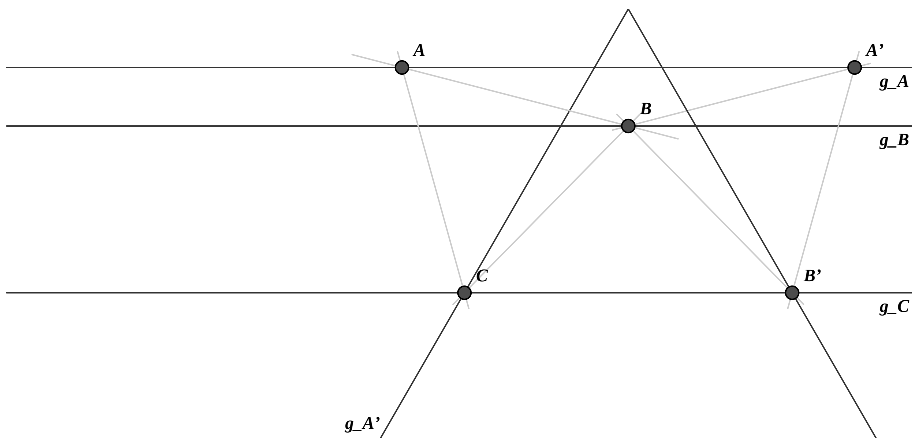

Bild 2: Die beiden Lösungen bei gegebenem B

Aufgabe 2 In einem regelmäßigen Tetraeder $ABCD$ mit der Kantenlänge a seien E, F, G und H die Mittelpunkte der Kanten $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}$ und $\overline{DA}$.

Zeigen Sie, dass $EFGH$ ein (ebenes) Quadrat ist.

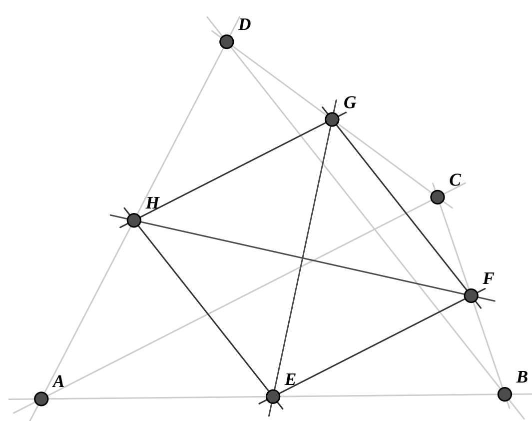

Bild 3: Tetraeder $ABCD$ mit Quadrat $EFGH$

Da EF die Mittellinie im Dreieck ABC ist, gilt $EF \parallel AC$ und $|EF| = \frac{a}{2}$. Analog erhalten wir $GH \parallel AC$, $EH \parallel BD \parallel FG$ und $|FG| = |GH| = |EH| = \frac{a}{2}$. Die vier Punkte liegen also in einer Ebene (die z.B. von den parallelen Geraden EF und GH bestimmt wird) und spannen ein Rhombus auf. Um zu zeigen, dass das Rhombus ein Quadrat ist, zeigen wir, dass es gleichlange Diagonalen $|EG| = |FH|$ besitzt.

Dazu betrachten wir zunächst die Deckbewegungen, die ein reguläres Tetraeder in sich selbst überführen. Es gibt genau 12 solche Drehbewegungen:

(1) 8 Drehungen, deren Achse durch je einen Eckpunkt und den Mittelpunkt der gegenüberliegenden Seitenfläche verläuft (es gibt 4 solche Achsen; um jede kann man um $\pm 120°$ drehen. Bezeichnung: d_A^+, d_A^- für die Drehungen um die Achse durch A),

(2) 3 Drehungen, deren Achse jeweils durch durch die Mitten gegenüberliegender Kanten verläuft (es gibt 3 solche Achsen; um jede muss man um $180°$ drehen. Bezeichnung: d_{AB}^{CD} für die Drehung um die Achse durch die Kantenmitten von AB und CD) und

(3) die identische Bewegung.

Die Drehung d_D^+ vertauscht die Eckpunkte A, B, C zyklisch, bildet damit E auf F und G auf H und so auch $\overline{EG}$ auf $\overline{FH}$ ab. Die beiden Strecken sind also gleichlang. (NB: Der Schnittpunkt beider Strecken ist unter der Drehung invariant, liegt also auf der Drehachse.)

Werden zwei Bewegungen aus obiger Liste nacheinander ausgeführt, so ergibt wieder eine Bewegung aus der Liste. Führen wir z.B. zuerst die Drehung d_D^+ aus, die A, B, C zyklisch vertauscht, und danach die Drehung d_B^- um die Achse durch den (neuen!) Eckpunkt B, so entspricht das genau der Drehung d_{AD}^{BC}. In der Tat, die Punkte werden dabei wie folgt abgebildet: $A \mapsto B \mapsto D,\ B \mapsto C \mapsto C,\ C \mapsto A \mapsto B,\ D \mapsto D \mapsto A$.

> **Weiterführende Aufgabe:** Erstellen Sie eine Übersicht, zu welcher Bewegung sich je zwei Bewegungen aus obiger Liste zusammen setzen.

Wir wollen nun die Zusammensetzung von Drehungen in der Ebene näher betrachten. Sei ABC ein *gleichseitiges* Dreieck. Bildpunkte nach den ersten k-ten Drehungen werden wir im Folgenden mit dem Index k kennzeichnen.

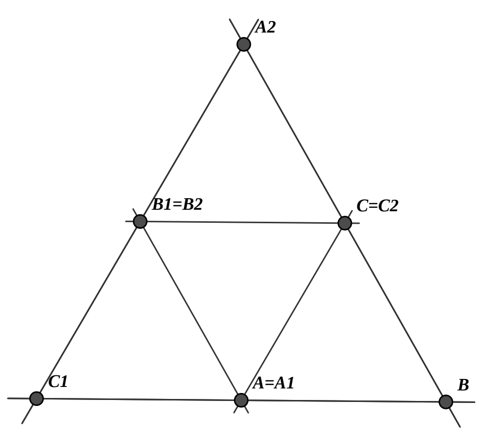

Bild 4: Gleichseitiges Dreieck ABC in den verschiedenen Positionen

Drehen wir die Ebene in A um $120°$, so geht ABC in das Dreieck $A_1B_1C_1$ mit $A_1 = A$ über. Drehen wir weiter in B_1 um $120°$, so geht $A_1B_1C_1$ in das Dreieck $A_2B_2C_2$ mit $B_2 = B_1$ und $C_2 = C$ über. Und drehen wir schließlich in C_2 um $120°$, so geht $A_2B_2C_2$ in das Ausgangsdreieck ABC über. Da eine Bewegung durch die Angabe der Bildpunkte von drei nicht kollinearen Punkten eindeutig bestimmt ist, ergibt die Nacheinanderausführung der drei angegebenen Drehungen also die identische Abbildung.

Aufgabe 3 Zeigen Sie, dass eine analoge Aussage für *jedes* beliebige Dreieck ABC gilt. Genauer: Zeigen Sie, dass das Nacheinanderausführen der Drehung mit Zentrum A um den Winkel 2α, der Drehung mit Zentrum B_1 um den Winkel 2β und der Drehung mit Zentrum C_2 um den Winkel 2γ die identische Abbildung ist.

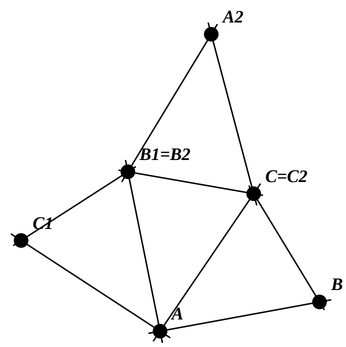

Bild 5: Beliebiges Dreieck ABC in den verschiedenen Positionen

Die erste Drehung überführt das Dreieck ABC in das Dreieck $A_1B_1C_1$ mit $A_1 = A$, wobei nach Konstruktion $|\angle BAC| = |\angle CAB_1| = |\angle B_1AC_1| = \alpha$ gilt. Das Dreieck CAB_1 ist also nach (sws) zum Dreieck ABC kongruent und die zweite Drehung überführt auch im allgemeinen Fall das Dreieck $A_1B_1C_1$ in ein Dreieck $B_2C_2A_2$ mit $B_2 = B_1$ und $C_2 = C$ und $|\angle A_2CB_1| = |\angle B_1CA| = |\angle ACB| = \gamma$. Die dritte Drehung überführt das Dreieck also wieder in seine Ausgangslage.

Ein gleichseitiges Dreieck ABC hat eine zweite interessante Eigenschaft. Führen wir Drehungen um jeweils $60°$ um A, B_1, C_2, A_3, B_4, C_5 aus (Bezeichungen wie oben), so erhalten wir ebenfalls die identische Abbildung.

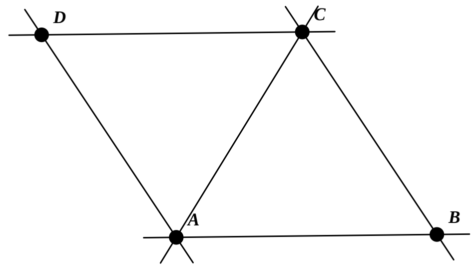

Bild 6: Gleichseitiges Dreieck ABC in den verschiedenen Positionen

Das Dreieck wechselt dabei ständig zwischen zwei verschiedenen Lagen hin und her und "dreht" sich um sich selbst. Die Lagen der drei Eckpunkte nach jeder Drehung sind in der folgenden Tabelle aufgelistet.

Ausgangslage :	$A_0 = A$	$B_0 = B$	$C_0 = C$
nach 1. Drehung :	$A_1 = A$	$B_1 = C$	$C_1 = D$
nach 2. Drehung :	$A_2 = B$	$B_2 = C$	$C_2 = A$
nach 3. Drehung :	$A_3 = C$	$B_3 = D$	$C_3 = A$
nach 4. Drehung :	$A_4 = C$	$B_4 = A$	$C_4 = B$
nach 5. Drehung :	$A_5 = D$	$B_5 = A$	$C_5 = C$
nach 6. Drehung :	$A_6 = A$	$B_6 = B$	$C_6 = C$

Auch hier können wir dasselbe Problem für ein allgemeines Dreieck ABC stellen:

Aufgabe 4 Welche Bewegung ergibt sich, wenn man die Drehung mit Zentrum A um den Winkel α, die Drehung mit Zentrum B_1 um den Winkel β, die Drehung mit Zentrum C_3 um den Winkel γ, die Drehung mit Zentrum A_3 um den Winkel α, die Drehung mit Zentrum B_4 um den Winkel β und die Drehung mit Zentrum C_5 um den Winkel γ nacheinander ausführt ?

Offensichtlich wird insgesamt um den Winkel $2(\alpha + \beta + \gamma) = 360^\circ$ gedreht. Die Zusammensetzung all dieser Drehungen ist also eine Verschiebung um einen Vektor $\overrightarrow{XX_6}$, wobei X ein beliebiger Punkt und X_6 dessen Bildpunkt unter der zusammen gesetzten Bewegung ist.

> **Weiterführende Aufgabe:** Zeigen Sie mit elementargeometrischen Mitteln, dass die Verschiebung in Wirklichkeit die identische Abbildung ist.

Wir wollen hier einen anderen Weg beschreiten und eine analytische Lösung unter Verwendung der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ angeben. Ich setze dabei die Kenntnis entsprechender Zusammenhänge voraus und verweise den unkundigen Leser bzw. Leserin auf das schöne Buch [1] von H. Pieper.

Fixieren wir ein Koordinatensystem und identifizieren x- bzw. y-Achse mit der reellen bzw. imaginären Achse der Gaußschen Zahlenebene, so können wir den Punkt $X = (x, y)$ unserer Ebene als komplexe Zahlen $z = x + i\,y$ interpretieren (und umgekehrt). Eine Drehung mit

Zentrum $z_0 \in \mathbb{C}$ um den Winkel α kann man dann wie folgt beschreiben: Der Bildpunkt $z' \in \mathbb{C}$ eines Originalpunkts $z \in \mathbb{C}$ berechnet sich aus der Formel

$$z' - z_0 = e^{i\,\alpha}(z - z_0) \quad \text{bzw.} \quad z' = e^{i\,\alpha}\, z + (1 - e^{i\,\alpha})\, z_0,$$

wobei $e^{i\,\alpha} = \cos(\alpha) + i\,\sin(\alpha)$ eine komplexe Zahl vom Betrag 1 ist, die die gegebene Drehung charakterisiert.

Sind $a_0, b_0, c_0 \in \mathbb{C}$ die Eckpunkte unseres Dreiecks und $z_0 \in \mathbb{C}$ ein beliebiger Punkt, so gilt demnach

$$\begin{aligned}
z_1 &= e^{i\,\alpha}\, z_0 + (1 - e^{i\,\alpha})\, a_0 \\
z_2 &= e^{i\,\beta}\, z_1 + (1 - e^{i\,\beta})\, b_1 \\
z_3 &= e^{i\,\gamma}\, z_2 + (1 - e^{i\,\gamma})\, c_2 \\
z_4 &= e^{i\,\alpha}\, z_3 + (1 - e^{i\,\alpha})\, a_3 \\
z_5 &= e^{i\,\beta}\, z_4 + (1 - e^{i\,\beta})\, b_4 \\
z_6 &= e^{i\,\gamma}\, z_5 + (1 - e^{i\,\gamma})\, c_5
\end{aligned}$$

wobei $b_1, c_2, \ldots$ das Bild von b_0 unter der ersten Drehung, das Bild von c_0 unter den ersten beiden Drehungen usw. ist. Wir können diese Gleichungen verwenden, um z_6 durch die Eckpunkte a_0, b_0, c_0 des Dreiecks in Ausgangslage und dessen Innenwinkel auszudrücken. Die entsprechenden Umformungen sind nicht schwierig, aber langweilig, so dass ich das Computeralgebrasystem MAPLE damit beauftragt habe. Zur Abkürzung ist $u = e^{i\,\alpha}, v = e^{i\,\beta}, w = e^{i\,\gamma}$ gesetzt:

```
z1:=u*z0+(1-u)*a0;
z2:=expand(v*z1+(1-v)*subs(z0=b0,z1));
z3:=expand(w*z2+(1-w)*subs(z0=c0,z2));
z4:=expand(u*z3+(1-u)*subs(z0=a0,z3));
z5:=expand(v*z4+(1-v)*subs(z0=b0,z4));
z6:=expand(w*z5+(1-w)*subs(z0=c0,z5));
```

$$\begin{aligned}
z_1 &= uz_0 + (1-u)a_0 \\
z_2 &= (1-u)a_0 + u(1-v)b_0 + vuz_0 \\
z_3 &= wvuz_0 + (1-u)a_0 + u(1-v)b_0 + vu(1-w)c_0 \\
z_4 &= wvu^2 z_0 + (u-1)(1+wvu)a_0 + u(1-v)b_0 + vu(1-w)c_0 \\
z_5 &= wv^2u^2 z_0 + (u-1)(1+wvu)a_0 + u(1-v)(1+wvu)b_0 + vu(1-w)c_0 \\
z_6 &= (u-1)(1+wvu)a_0 + u(1-v)(1+wvu)b_0 + uv(1-w)(1+wvu)c_0 + w^2v^2u^2 z_0
\end{aligned}$$

Beachten wir, dass $uvw = e^{i(\alpha+\beta+\gamma)} = e^{i\,\pi} = -1$ gilt, so folgt $z_6 = z_0$, d.h. die Zusammensetzung der sechs Drehungen ist in der Tat die identische Bewegung.

Literatur

[1] H. Pieper: *Komplexe Zahlen*. Verlag der Wissenschaften, Berlin und Harry Deutsch Verlag, Frankfurt/M., 1988.

Attribution Section

graebe (2004-09-09): Contributed to KoSemNet