

# Spieltheorie

David Bauer, Freiberg

## 1 Gewinnerzwingende Strategien

In jedem Zweipersonenspiel, das den folgenden Regeln genügt, kann einer der beiden Spieler den Sieg erzwingen.

- Es gibt nur eine endliche Anzahl möglicher Stellungen.
- Das Spiel endet in jedem Fall nach einer endlichen Anzahl von Zügen.
- Es gibt am Ende immer einen Sieger (kein Unentschieden).
- Die möglichen Züge in einer Spielsituation sind für beide Spieler gleich.

**Übung 1:** Welche der Regeln erfüllt Schach?

Die Endsituationen des Spiels, bei denen man gewonnen oder verloren hat, bezeichnet man als Gewinner- bzw. Verlierersituation. Ferner heißt auch jede Spielsituation Gewinnersituation (**GS**), wenn man einen bestimmten Zug finden kann, der den Gegner in eine Verlierersituation führt. Dagegen wird jede Spielsituation als Verlierersituation (**VS**) bezeichnet, wenn jeder mögliche Zug dem Gegner zu einer Gewinnersituation verhilft. Auf diese Weise lässt sich durch Rückwärtsschließen für jede Spielsituation entscheiden, ob es sich um eine Gewinnersituation oder um eine Verlierersituation handelt.

*Der Spieler, der den ersten Zug macht, kann den Sieg genau dann erzwingen, wenn zu Beginn eine Gewinnersituation vorliegt.*

**Übung 2:** Anna und Bruno spielen mit einem Stück Schokolade, dessen untere rechte Ecke verschimmelt ist. Sie brechen die Tafel abwechselnd längs der Rippen entzwei und essen eine der beiden Hälften auf. Wer das verschimmelte Stück isst, hat verloren. Anna macht den ersten Zug.

Wer kann den Sieg erzwingen, ...

- ... wenn sie mit einem Stück Ritter-Sport-Schokolade ( $4 \times 4$ ) beginnen?
- ... wenn sie mit einer Tafel Milka-Schokolade ( $6 \times 10$ ) beginnen?

---

This material belongs to the Public Domain KoSemNet data base. It can be freely used, distributed and modified, if properly attributed. Details are regulated by the *Creative Commons Attribution License*, see <http://creativecommons.org/licenses/by/2.0>.

For the KoSemNet project see <http://lsgm.uni-leipzig.de/KoSemNet>.

## 2 Lösungsmethoden für Olympiadaufgaben

### 2.1 Rückwärtsarbeiten und Invarianzprinzip

Dies ist wahrscheinlich die wichtigste Methode, um sukzessive alle Gewinner- und Verlierersituationen zu ermitteln:

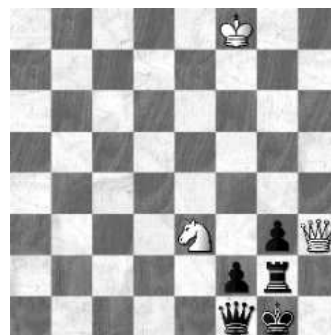
*Berechne durch Rückwärtsschließen einige GS und VS. Nach einiger Zeit erkennst du ein Muster (d. h. eine geeignete Invariante), die eine Darstellung von allen Gewinner- und Verlierersituationen liefert.*

#### Übung 3: Teile und Herrsche

Auf dem Tisch liegen zwei Haufen Kekse. Der eine Haufen besteht aus 31 Keksen, der andere aus 43 Keksen. Ein Spielzug besteht darin, die Kekse eines Haufens aufzuessen und den anderen in zwei Haufen zu zerteilen. Dabei darf kein Keks zerbrochen werden, jedoch dürfen die beiden neuen Haufen null Kekse enthalten. Der Spieler, der bei seinem Zug keinen Keks essen kann, hat verloren. Welcher Spieler kann den Sieg erzwingen?

### 2.2 Vorwärtsarbeiten

Manchmal gibt es zu viele Endpositionen, um durch Rückwärtsschließen das Problem zu bearbeiten. Mitunter lässt sich die Anzahl der (sinnvollen) Züge des Gegners eingrenzen, so dass man ausgehend von der vorliegenden Spielsituation durch Vorwärtsarbeiten zum Ziel gelangt. Ein typisches Beispiel sind Schachrätsel wie rechts (Matt in 2 Zügen).



### 2.3 Zerlegung

Eine wichtige Strategie ist es, das Spiel in kleine Bereiche zu zerlegen, um dann in jedem dieser Bereiche den Sieg zu erzwingen. Meistens ist folgende Idee bereits für die Lösungsfindung ausreichend:

*Teile alle Spielpositionen in Paare ein, so dass es einen Zug zwischen beiden Elementen eines jeden Paares gibt. Immer wenn der Gegner die Position eines Paares annimmt, ziehst du auf die andere Position des Paares.*

**Übung 4:** Eine Tafel besteht aus sechs nebeneinander liegenden Feldern. Zwei Spieler A und B tragen abwechselnd so lange je eine der Ziffern  $0, 1, 2, \dots, 9$  in ein beliebiges noch freies Feld ein, bis alle Felder besetzt sind; dabei dürfen verschiedene Felder mit derselben Ziffer belegt werden. A fängt an. Nachdem B eine Ziffer in das letzte freie Feld eingetragen hat, werden die sechs aneinandergereihten Ziffern als Dezimaldarstellung einer ganzen Zahl  $z$  gedeutet. B hat gewonnen, wenn  $z$  durch eine vorher vereinbarte natürliche Zahl  $n$  teilbar ist. Für welche natürlichen Zahlen  $n$  zwischen 1 und 15 kann B durch geschicktes Spiel den Gewinn erzwingen, für welche nicht?

## 2.4 Symmetrie

Häufig ist es nützlich, die symmetrischen Eigenschaften des Spielfelds auszunutzen, um gegnerische Züge zu kontern. Dies macht sich unter anderem auch Stefan in Northcotts Spiel zunutze (Aufgabe 451324).

## 2.5 Indirektes Schließen

Es ist bekannt, dass bei einem Spiel nach unseren vier Regeln einer der beiden Spieler eine Gewinnstrategie haben muss. Man kann daher indirekt beweisen, dass ein Spieler bei optimalem Spiel verliert, indem man annimmt, er habe eine Gewinnstrategie und dies zu einem Widerspruch führt.

**Übung 5:** Beim Doppelschach machen Schwarz und Weiß abwechselnd zwei gültige Züge nach den üblichen Schachregeln, wobei Weiß beginnt. Man zeige, dass Weiß bei optimalem Spiel Remis erzwingen kann!

## 3 Aufgaben

**Aufgabe 1:** Zwei Spieler spielen ein Spiel, bei dem sie abwechselnd Zahlen aus der Menge  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$  nehmen. Jede Zahl darf also nur einmal gewählt werden. Besitzt ein Spieler drei Zahlen, die sich zu 15 addieren, so hat er gewonnen. Wer gewinnt bei optimalem Spiel? Oder gibt es ein Unentschieden?

**Aufgabe 2:** Beginnend bei 2 ersetzen zwei Spieler abwechselnd die aktuelle Zahl  $N$  durch  $N + d$ , wobei  $d < N$  irgendein positiver Teiler von  $N$  sein muss. Der Spieler, bei dem die Zahl nach seinem Zug erstmals größer oder gleich 2006 ist, hat verloren. Welcher der beiden Spieler gewinnt?

**Aufgabe 3:** Zwei Personen P und Q spielen das folgende Spiel. In der Gleichung  $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$  belegt zunächst P, danach Q und schließlich wieder P je einen noch nicht belegten der drei Koeffizienten mit einer reellen Zahl. Das Spiel ist genau dann für P gewonnen, wenn die so entstandene Gleichung drei paarweise verschiedene reelle Lösungen hat. Man untersuche, ob P bei jeder Spielweise von Q den Gewinn erzwingen kann.

**Aufgabe 4:** Zwei Personen A und B machen folgendes Spiel. Sie nehmen aus der Menge  $\{0, 1, 2, 3, \dots, 1024\}$  abwechselnd 512, 256, 128, 64, 32, 16, 8, 4, 2, 1 Zahlen weg, wobei A zuerst 512 Zahlen wegnimmt, B dann 256 Zahlen usw. Es bleiben zwei Zahlen  $a, b$  stehen. B zahlt an A den Betrag  $|a - b|$ . A möchte möglichst viel gewinnen, B möglichst wenig verlieren. Welchen Gewinn erzielt A, wenn jeder Spieler seiner Zielsetzung entsprechend optimal spielt?

**Aufgabe 5:** Clara und Dorothea spielen das Streckenspiel. Dieses Spiel wird mit 64 in einem Quadratgitter angeordneten Punkten gespielt. Clara beginnt das Spiel, indem sie zwei senkrecht oder waagrecht unmittelbar benachbarte Punkte miteinander verbindet. Im weiteren Spielverlauf besteht ein Zug darin, den bestehenden Streckenzug um eine Strecke zu

erweitern, indem einer der beiden Endpunkte wiederum mit einem senkrecht oder waagrecht unmittelbar benachbarten Punkt verbunden wird. Die einzige Einschränkung besteht darin, dass man nicht zu einem Punkt ziehen darf, der bereits im Streckenzug enthalten ist. Verloren hat diejenige, die keinen Zug mehr machen kann. Kann eine der Spielerinnen den Sieg erzwingen? Wenn ja, gebe man eine Strategie an, die mit Sicherheit zum Sieg führt.

**Aufgabe 6:** Wiebke und Stefan spielen mit einem Blatt Kästchenpapier. Sie beginnen mit einem 60 Zeilen und 40 Spalten großen Rechteck und zerschneiden abwechselnd in jedem Zug eines der Rechtecke auf dem Tisch entlang der Linien des Karopapiers in zwei kleinere Rechtecke. Dabei darf Stefan bei seinen Zügen nur senkrechte und Wiebke nur waagerechte Schnitte machen. Verloren hat, wer keinen gültigen Zug mehr machen kann.

- (a) Wer kann den Sieg erzwingen, wenn Stefan beginnt?
- (b) Wer kann den Sieg erzwingen, wenn Wiebke beginnt?

### **Attribution Section**

Beitrag von David Bauer zum Begleitheft 2006 im Vorbereitungslehrgang der Sächsischen Mannschaft auf die MO-Bundesrunde.