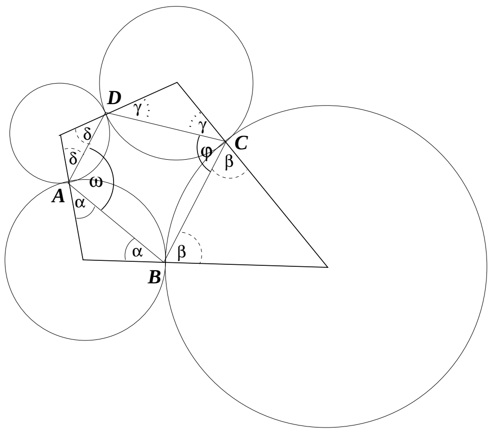
1 Sehnenvierecke

Satz 1 *Ein Viereck ist genau dann ein Sehnenviereck, wenn sich die gegenüber liegenden Winkel zu* $180°$ *ergänzen.*

Aufgabe 1 Es seien k_i, $i = 1, \dots 4$, Kreise, wobei sich k_i und k_{i+1} ($k_5 = k_1$) von außen berühren. Beweise, dass die vier Berührungspunkte auf einem Kreis liegen.

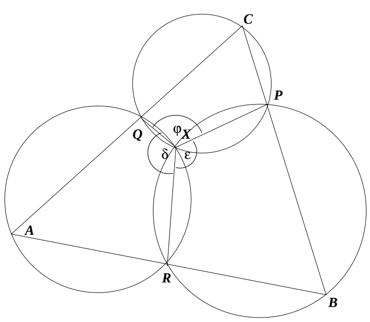


Beweis: Es seien A, B, C und D die Berührungspunkte der vier Kreise und α, β, γ und δ die Basiswinkel der eingezeichneten gleichschenklichen Dreiecke. Dann gilt für die gegenüberliegenden Innenwinkel des Vierecks $ABCD$ bei A und C

$$\omega + \varphi = 360° - (\alpha + \beta + \gamma + \delta).$$

Die selbe Formel gilt aber für die Summe der Innenwinkel bei B und D. Daher gilt $\varphi + \omega = 180°$ und $ABCD$ ist ein Sehnenviereck. □

Aufgabe 2 Gegeben sei ein Dreieck ABC sowie Punkte P, Q und R auf den Seiten $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ bzw. $\overline{AB}$. Beweise, dass sich die drei Umkreise der Dreiecke ARQ, BRP und CPQ in einem gemeinsamen Punkt schneiden.



Beweis: Es sei X der Schnittpunkt der beiden Umkreise von ARQ und BRP, der von R verschieden ist. Dann gilt für die Innenwinkel der beiden Sehnenvierecke:

$$\delta = 180° - \alpha, \quad \varepsilon = 180° - \beta.$$

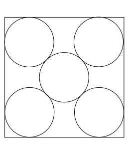
Folglich ist

$$\varphi = 360° - (180° - \alpha + 180° - \beta) = \alpha + \beta = 180° - \gamma.$$

Damit liegen C, P, X und Q auf einem gemeinsamen Kreis. □

2 Radien addieren und subtrahieren

Aufgabe 3 Gegeben seien zwei Kreise mit den Radien r und R, $r < R$, die sich gegenseitig von außen und die Schenkel eines gegebenen Winkels der Größe Winkels α von innen berühren.
Bestimme das Verhältnis R/r für $\alpha \in \{90°, 60°\}$.



Aufgabe 4 Gegeben seien 5 kongruente Kreise vom Radius r, die sich in der angegebenen Weise berühren und einem Einheitsquadrat einbeschrieben sind.
Bestimme r.

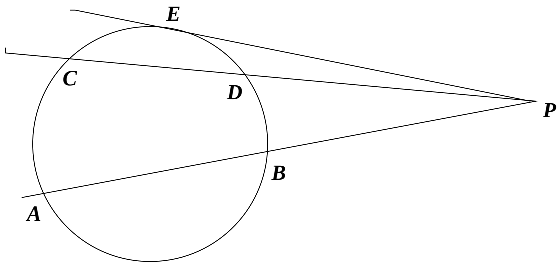
Lösung: $r = \frac{1}{2}(\sqrt{2} - 1)$.

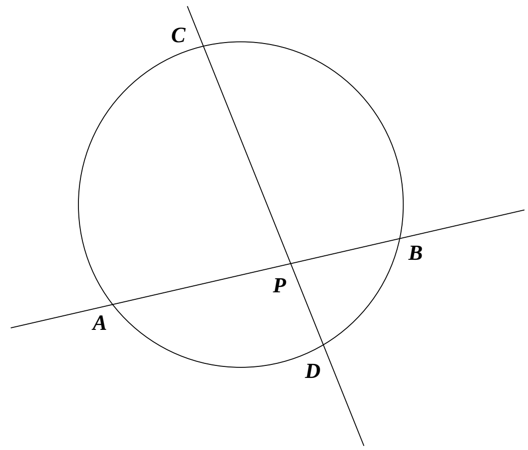
Aufgabe 5 Wie klein muss das Verhältnis r/R zwischen den Radien kleinen und großen Kugel sein, damit sich die kleine Kugel in einer Zimmerecke vor der großen Kugel „verstecken“ kann?

Aufgabe 6 Drei Kreise mit den Radien $a \leq b \leq c$ berühren einander von außen und auch eine gegebene Gerade g. Beweise, dass dann gilt

$$\frac{1}{\sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{c}} = \frac{1}{\sqrt{a}}.$$

3 Sekantensatz





Satz 2 (Sekantensatz und Sehnensatz) *Liegen die vier Punkte A, B, C und D auf einem Kreis und ist P der Schnittpunkt der Geraden AB und CD, so gilt*

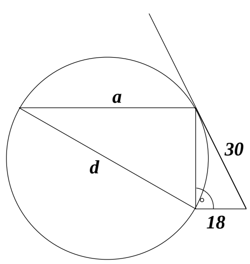
$$\left|\overline{PA}\right| \cdot \left|\overline{PB}\right| = \left|\overline{PC}\right| \cdot \left|\overline{PD}\right|.$$

Satz 3 (Sekanten–Tangenten–Satz) *Liegen die Punkte A und B auf einem Kreis, P auf AB außerhalb des Kreises und ist E der Berührungspunkt der Tangente von P an den Kreis, so gilt*

$$\left|\overline{PA}\right| \cdot \left|\overline{PB}\right| = \left|\overline{PE}\right|^2.$$

Satz 4 *(Umkehrung des Sekantensatzes) Liegen die Punkte A und B bzw. C und D auf zwei von P ausgehenden Strahlen und gilt $\overline{PA}{\cdot}\overline{PB} = \overline{PC}{\cdot}\overline{PD}$, so liegen A, B, C und D auf einem Kreis.*

Aufgabe 7 Zwei Kreise schneiden sich in den Punkten A und B. Es sei P ein Punkt auf AB. Beweise, dass die Tangentenabschnitte von P an die beiden Kreise gleich lang sind.



Aufgabe 8 In der nebenstehenden Figur sei die Länge des Tangentenabschnitts gleich 30 und der Winkel zwischen der Strecke der Länge 18 und der einen Sehne sei ein rechter.
Bestimme die Länge a der Sehne und den Durchmesser d.

Aufgabe 9 Wenn man auf dem Ziffernblatt einer Uhr die 1 mit der 8 und die 11 mit der 3 verbindet, welchen Winkel schließen dann die beiden Strecken ein?