Matheschülerzirkel
Universität Augsburg
Schuljahr 2014/2015

Dritter Zirkelbrief: Gruppentheorie

Inhaltsverzeichnis

1 Kurze Wiederholung von Gruppen

Schon früh in der Schule lernt man, dass man mit Zahlen nicht nur Dinge abzählen kann, sondern auch rechnen kann. Doch was steckt eigentlich hinter der ganzen Struktur? Funktioniert das nur für Zahlen oder vielleicht auch für komplexere Dinge? Im letzten Jahr gab es einen Korrespondenzbrief, in dem ihr Gruppen und deren Wirkungen kennengelernt habt. Hier werden wir Gruppen noch ein wenig klassischer untersuchen und beginnen nochmal bei deren Definition sowie ersten Beispielen.

Zuerst verallgemeinern wir diese Operationen wie „Plus“ und „Mal“. Sei G eine beliebige Menge. Eine *Verknüpfung* $\circ$ ist eine Abbildung vom kartesischen Produkt $G \times G$ in die Menge G selbst oder kurz geschrieben

$$\circ : G \times G \to G.$$

Das bedeutet, dass $\circ$ sich zwei Elemente aus der Menge G nimmt und daraus ein neues macht. Genauso wie „Plus“ und „Mal“.

1.1 Die Definition einer Gruppe

Ein Paar $(G,\circ)$ bestehend aus einer Menge G und einer Verknüpfung $\circ$ ist alleine noch nicht so spannend. Um von einer Gruppe zu reden, fordern wir folgende Eigenschaften, die ihr auch von „Plus“ und „Mal“ (bis auf eine Ausnahme) kennt.

- **A**ssoziativität: Für je drei Elemente a, b, c aus G gilt $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$.
- **N**eutrales Element: Es existiert ein Element e in G, sodass für jedes andere Element a aus G $a \circ e = a = e \circ a$ gilt.
- **I**nverses Element: Zu jedem Element a aus G existiert ein Element a^{-1} in G, sodass $a \circ a^{-1} = e = a^{-1} \circ a$ gilt.

Erfüllt eine Gruppe zusätzlich

- **K**ommmutativität: Für je zwei Elemente a, b aus G gilt $a \circ b = b \circ a$.

so nennt man sie **a**belsch.[1] Als kleine Eselsbrücke dient dabei *ANIKA*.

1.2 Erste Beispiele

Als erstes Beispiel wären da die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ mit der Addition als Verknüpfung. Das bedeutet für uns $a \circ b := a + b$ mit $a, b \in \mathbb{Z}$.[2] Diese Operation ist assoziativ (das lernt man sehr früh in der Schule), sie ist kommutativ (auch das kennt man aus der Schule) und es gibt ein neutrales Element, die Null. Das inverse Element zur ganzen Zahl a ist die Zahl $-a$, denn $a + (-a) = 0$. Damit haben alle ganzen Zahlen ein Inverses[3] und $(\mathbb{Z}, +)$ bildet also eine Gruppe.

Aufgabe 1. *Gruppen-Check*

Untersuche folgende Paare auf ihre Gruppeneigenschaften. Falls vorhanden, wie sehen die neutralen Elemente und Inversen aus?

a) $(\mathbb{N}, +)$

b) $(\mathbb{Q}, +)$

c) $(\mathbb{R}, \cdot)$

d) $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$

---

[1] Niels Henrik Abel, *05.08.1802, †06.04.1829 war ein norwegischer Mathematiker. Bekannt ist er für abelsche Gruppen, abelsche Varietäten und den Abel-Preis, der nach ihm benannt wurde. Er ist einer der wenigen Mathematiker, deren Namen als *kleingeschriebene* Adjektive auch im Englischen üblich sind.

[2] Das Zeichen „:=“ bedeutet eine Definition. Das heißt, dass wir $a \circ b$ als $a + b$ definieren.

[3] Hier bedeutet „Inverses“ invers bezüglich der Addition und *nicht* bezüglich der Multiplikation. Die Bezeichnung a^{-1} steht hier also für $-a$ und nicht $\frac{1}{a}$.

1.3 Warum sind Gruppen wichtig?

Ok, jetzt haben wir etwas, was wir schon gut kennen in eine Definition gepackt. Aber wozu das ganze? Das Interessante an Gruppen ist, dass diese sehr häufig in der Mathematik und der Physik auftreten, denn ganz oft hat man eine Verknüpfung von Dingen, die die obigen Regeln erfüllt und dann kann man allgemeine Aussagen über beliebige Gruppen verwenden.

Ein häufiger Ort, wo Gruppen auftauchen sind Probleme, in denen es eine „Symmetrie" gibt. Mit Symmetrie bezeichnen wir hier irgendeine Art von Transformation (zum Beispiel eine Bewegung), welche die Fragestellung oder gewissen Eigenschaften unverändert lässt. Also ist zum Beispiel ein Kreis symmetrisch bezüglich Drehungen um den Mittelpunkt des Kreises. Allgemein lassen sich zwei solche Symmetrien hintereinander ausführen und man erhält eine neue Symmetrie. Beim Kreis sind zum Beispiel zwei Drehungen um den (orientierten) Winkel α eine Drehung um den Winkel 2α. Das inverse Element ist die Drehung um $-\alpha$ und das neutrale Element die Drehung, die nichts macht. Diese Symmetriegruppe ist sogar abelsch.

Symmetrien sind so grundlegend in der Physik, dass beispielsweise der Satz von Noether[4] einer der wichtigsten in der theoretischen Physik ist. Anschaulich besagt er, dass das Vorhandensein von gewissen Symmetrien die Existenz einer Erhaltungsgröße erzwingt. Alle Elementarteilchen im Standardmodell haben ihre Eigenschaften von gewissen Objekten, die man Gruppen zuordnet. Wenn Physiker also von elektromagnetischer Eichfeldtheorie sprechen, dann meinen sie, dass es eine Symmetriegruppe namens $U(1)$ gibt und diese legt fest, welche Arten von Elementarteilchen dieser Kraft entsprechen können.

2 Weitere Beispiele

Jetzt schauen wir uns mal etwas komplizierte Beispiele an.

2.1 Symmetrische Gruppen

Enorm wichtig in der Mathematik sind die *symmetrischen Gruppen*. Zu jeder natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}$ gibt es eine symmetrische Gruppe S_n, deren Elemente angeben, wie man Zahlen von 1 bis n untereinander tauschen kann. Die Verknüpfung von zwei Elementen ist eine Ausführung der Vertauschungen nacheinander. Das erscheint im ersten Moment kompliziert, aber wir werden es anhand eines Beispiels vestehen.

Wir betrachten die S_3. Ein Element in der S_3 kann beispielsweise die Form

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

[4]

haben. Dieses Element gibt folgende Vertauschung an: *Die 1 wird auf die 2 geschickt, die 2 wird auf die 3 geschickt und die 3 wird auf die 1 geschickt.*

Bei der Verknüpfung von zwei Elementen beginnt man zuerst mit dem rechten Element

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & b & c \end{pmatrix}.$$

Die Zahl a erhälten wir, indem wir uns überlegen auf welche Zahl die 1 geschickt wird. Das rechte Element schickt 1 auf 1 und das linke Element die 1 auf die 2. Also ist $a = 2$. Als nächstes suchen wir b. Das rechte Element schickt die 2 auf die 3, das linke Element schickt die 3 weiter auf die 1. Also wird die 2 insgesamt auf die 1 geschickt, weshalb b gleich 1 ist. Somit bleibt für c nur noch die 3 übrig. Damit erhalten wir

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2.

Finde alle sechs Elemente der S_3 und gib ihre Inversen an. Welches Element ist überhaupt das neutrale Element?

Aufgabe 3.

Ist die S_3 eine kommutative Gruppe?

Aufgabe 4.

Wieviele Elemente hat die S_n für $n \in \mathbb{N}$?

Jetzt kann man sich fragen, warum diese symmetrischen Gruppen überhaupt interessant sind. Eine Anwendung hat zum Beispiel die S_{26}. Ordnet man jedem Buchstaben ihre Stelle im Alphabet zu, so gibt ein Element der S_{26} eine Vertauschung der Buchstaben an. Dies dient zur Verschlüsselung von Texten und ist deshalb so toll, weil man durch das inverse Element wieder zurück zum ursprünglichen Text kommt. Sonderfälle davon sind die *Caesar*[5]*-Verschlüsselungen* oder auch die *Vigenère*[6]*-Verschlüsselung*.

[5]Gaius Iulius Caesar, *13.07. 100 v.Chr., †15.03. 44 v.Chr., römischer Feldherr und Staatsmann, benutzte angeblisch die Caesar-Verschlüsselung für seine Truppen.

[6]Blaise de Vigenère, *15.04.1523, †1596, französischer Diplomat und Kryptograf.

2.2 Die Würfelgruppe

Ein weiteres Beispiel ist der Zauberwürfel oder auch auf Englisch der „Rubik's Cube". Fixieren wir seine sechs Seitenmittelpunkte, so kann man die restlichen 48 Flächen miteinander tauschen, indem man die Außenseiten dreht.

Zunächst überzeugen wir uns davon, dass die Drehungen der sechs Außenseiten (die mittleren wollen wir fixieren, denn wir können ja immer den ganzen Würfel zurück drehen) tatsächlich eine Gruppe bilden. Die Verknüpfung ist das Hintereinanderausführen von zwei Zügen, das neutrale Element macht einfach gar nichts und die Inversen sind gegeben durch das „Zurückdrehen".

Aufgabe 5.

Überzeuge dich davon, dass die Würfelgruppe damit tatsächlich eine Gruppe ist. Ist die Würfelgruppe kommutativ?

Insgesamt hat der Würfel $9 \times 6 = 54$ Teile, wobei wir die mittleren sechs fixieren wollen. Daher könnte man denken, dass wir mit den Drehungen diese Teile untereinander vertauschen können und damit die Würfelgruppe die S_{48} wäre. Allerdings kann man zum Beispiel Ecken mit Mittelstücken nicht tauschen, weshalb wir hier nur eine Teilmenge der S_{48} betrachten.

Aber das unglaubliche ist, dass wenn wir uns eine Tabelle rausschreiben mit allen möglichen Zuständen des Würfels und ihnen die richtigen Elemente der S_{48} zuordnen, wir direkt das Inverse bestimmen könnten, mit dem wir den Würfel sofort lösen können. Der einzige Haken dabei ist, dass die S_n auch $n!$ viele Elemente besitzt und dies damit enorm schwierig und unpraktikabel wäre.

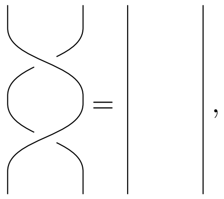
2.3 Die Zopfgruppe

Vielleicht habt ihr schonmal etwas von (mathematischen) Knoten gehört. Zöpfe sind so ähnlich, bilden jedoch eine richtige Gruppe und haben dadurch gewisse Vorteile. Ihr Studium hilft auch beim Studium von Knoten. Daher schauen wir uns jetzt einmal diese Zopfgruppe an.

2.3.1 Was sind Zöpfe?

Definition 2.1. Ein *Zopf* auf n Strängen ist ein Gebilde aus n Fäden, die sich nicht durchdringen dürfen und sowohl oben als auch unten an n Aufhängepunkten festgemacht sind. Außerdem dürfen die Fäden immer nur nach unten gehen, also niemals wieder „zurück nach oben" gehen. Zwei Zöpfe sehen wir als gleich an, wenn man sie durch echte physikalische Bewegungen ineinander überführen kann, wobei man mit den Fäden nicht über das obere Ende oder unter das untere Ende gehen darf.[7]

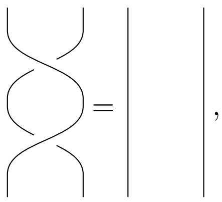
Einen Zopf illustrieren wir durch seine Fäden. Für die Übersichtlichkeit färben wir manchmal die Stränge ein. Zum Beispiel gilt

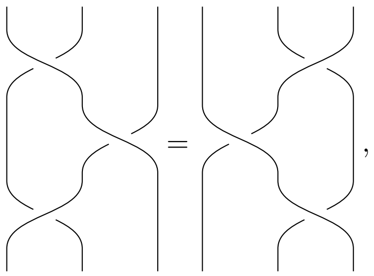


wie man leicht einsieht.

Es gibt nun mehrere Fragen, die man sich stellen kann. Einerseits benötigt man für technische Argumente eine Art Baukasten aus Zügen oder Bewegungen, die reichen um gleiche Zöpfe ineinander zu überführen. Analog wie bei Knoten sind dies die sogenannten Reidemeisterzüge.

Definition 2.2. Die *Reidemeisterzüge*[8] sind die folgenden Operationen:

Typ II: 

Type III: 

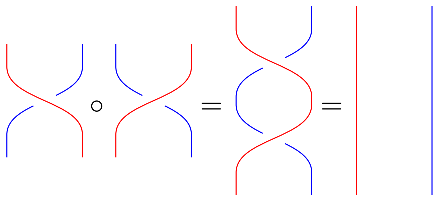
Es gibt daneben noch den Reidemeisterzug I, welcher eine kleine Schleife entdreht. Aufgrund der Definition von Zöpfen benötigen wir diesen Zug hier allerdings nicht. Den Reidemeisterzug III kann man sich vorstellen als das Vorbeiziehen eines Strangs hinter einer Kreuzung. Von allen Zügen gibt es natürlich noch die gespiegelten Versionen, welche man auch als Reidemeisterzüge bezeichnet.

[7] Nicht ganz unüberraschend ist die genaue mathematische Definition von „Fäden“ und „physikalische Bewegung“ deutlich länger und nicht sehr spannend. Sie bedeutet genau das, was du denkst.
[8] Kurt Werner Friedrich Reidemeister, *13.10.1893, †08.07.1971, deutscher Mathematiker.

Die Bedeutung dieser Züge liegt darin, dass man beweisen kann, dass sie ausreichen um gleiche Zöpfe zu identifizieren. Das heißt, dass zwei Zöpfe gleich sind genau dann, wenn sie durch die endlich viele Reidemeisterzüge sowie Verschiebungen von Fäden, die nichts an den Kreuzungen ändern, ineinander überführen kann.

2.3.2 Wie bilden Zöpfe eine Gruppe?

Zöpfe mit gleich vielen Strängen, sagen wir n, bilden eine Gruppe B_n indem man die Zöpfe hintereinander setzt. Beachte, dass dann die mittleren Verbindungspunkte nicht mehr am Ende oder Anfang sind und deswegen bewegt werden dürfen. Zum Beispiel gilt

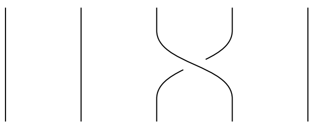


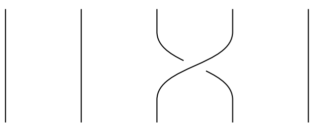
Die Höhe des Zopfes spielt dabei keine Rolle, es gibt also nur einen Zopf, der keinerlei Kreuzungen hat.

Das neutrale Element ist nun gegeben durch genau diesen Zopf ohne Kreuzungen, denn wenn wir ihn vor oder hinter einen beliebigen Zopf legen, dann wird dieser gar nicht verändert.

Das inverse Element eines beliebigen Zopfes ist etwas schwieriger zu bestimmen. Dazu nutzen wir die Reidemeisterzüge von oben. Aktzeptieren wir, dass die Reidemeisterzüge ausreichen um gleiche Zöpfe zu identifizieren, so können wir folgende Überlegung anstellen. Ein Zopf auf n Strängen besteht aus Kreuzungen und nichts dazwischen. Das heißt, wir können (bis auf Verschiebungen ohne Kreuzungen zu verändern) jeden Zopf beschreiben durch eine Folge von Kreuzungen. Dann müssen wir jedoch beachten, dass zwei solche Abfolgen von Kreuzungen durchaus den gleichen Zopf beschreiben können.

Dies führt auf die Idee der *Präsentation* einer Gruppe. Einerseits geben wir sogenannte *Erzeuger* an und andererseits fordern wir, dass diese gewisse *Relationen* erfüllen. In unserem Fall sind die Erzeuger

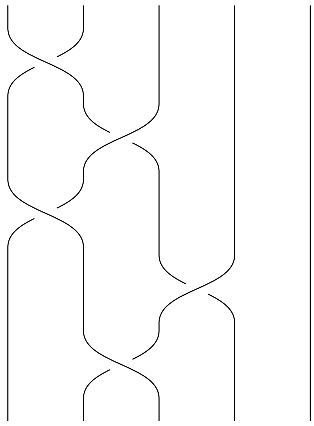
$a_i =$  ,

$b_i =$ 

wobei der Index i der Nummer des linken oberen Strangs entspricht. Das heißt insbesondere, dass i zwischen 1 und $n-1$ eine beliebige natürliche Zahl sein kann. Die abgebildeten Zöpfe sind also konkret a_3 und b_3 in der B_5. Aus diesen Erzeugern können wir nun ein *Wort*, das heißt eine Kette von Erzeugern[9], bilden. Zum Beispiel

$$a_1 b_2 a_1 b_3 a_2,$$

was dem folgenden Zopf in der Zopfgruppe B_5 auf 5 Strängen[10] entspricht



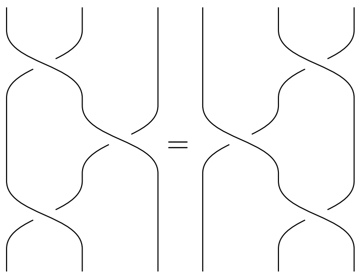
.

Ist dir anschaulich klar, dass man damit jeden Zopf beschreiben kann? Da aber die Reidemeisterzüge gelten müssen, sind einige dieser Wörter gleich und wir beschreiben dies durch Gleichungen, die man Relationen nennt.

Reidemeisterzug I besagt zum Beispiel $a_i b_i = 1$, also ist b_i gerade das Inverse von a_i. Daher lassen wir die b_i's von jetzt an weg und erlauben stattdessen a_i^{-1} in unseren Wörtern. Reidemeisterzug II besagt nun die berühmte $ABA = BAB$-Relation

$$a_1 a_2 a_1 = a_2 a_1 a_2,$$

welche für alle benachbarten Erzeuger a_i und a_{i+1} gilt. Als Diagramm bedeutet diese Gleichung



,

was offensichtlich stimmt.

[9] Ähnlich wie bei der Multiplikation von Zahlen lässt man das Verknüpfungszeichen oft weg.
[10] Beachte, dass also a_1 einen anderen Zopf in der B_2 entspricht als in der B_5.

Aufgabe 6.

Welche Relation erfüllen die Erzeuger a_i und a_j, wenn der i-te und der j-te Strang nicht benachbart sind? Welches Diagramm entspricht dieser Aussage?

Damit haben wir den folgenden Satz verstanden:

Satz 2.3. *Die Zopfgruppe B_n wird erzeugt von $a_1, \dots, a_{n-1}$ mitsamt den Relationen $a_i a_{i+1} a_i = a_{i+1} a_i a_{i+1}$ für $i = 1, \dots, n-2$ und $a_i a_j = a_j a_i$ für $i, j = 1, \dots, n-1$ und $i = j \pm 1$.*

2.3.3 Was haben Zöpfe mit Permutationen zu tun?

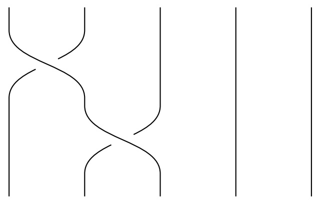
Als erstes überlegen wir uns, wie die einfachsten Zopfgruppen eigentlich aussehen und ob diese abelsch sind.

Aufgabe 7.

Wie kann man die Zopfgruppe B_1 und die B_2 noch beschreiben? Welche Zopfgruppen sind kommutativ?

Jetzt schauen wir noch mal die Zöpfe selber an. Stellt euch vor, dass die Stränge eines Zopfes oben nummeriert sind von 1 bis n. Dann kann man den Zöpfen folgen und kommt unten an einem möglicherweise anderen Strangende heraus, wenn man diese auch von 1 bis n nummeriert hat. Das heißt, man kann aus einem Zopf eine Vertauschung beziehungsweise Permutation der Zahlen 1 bis n machen, also ein Element der symmerischen Gruppe auf n Elementen, die wir ja schon oben gesehen haben. Schauen wir uns doch mal ein Beispiel an.

Der Zopf



entspricht der Permutation

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 8.

Stell dir vor, dass du zwei Zöpfe miteinander verknüpfst, also untereinander verklebst. Sowohl die einzelnen Zöpfe als auch der neu entstandene Zopf entsprechen einer Permutation. Wie hängen diese Permutationen zusammen?

Wenn ihr die letzte Aufgabe gelöst habt, dann seid ihr auf eines der wichtigsten Konzepte der Algebra oder eigentlich der gesamten Mathematik gestoßen, sogenannten *Morphismen*. Hier handelt es sich um einen *Homomorphismus*, was soviel bedeutet wie strukturerhaltende Abbildung.

Definition 2.4. Seien G und H Gruppen. Dann heißt eine Abbildung $\phi : G \longrightarrow H$ Gruppenhomomorphismus wenn

$$\phi(g_1 \circ g_2) = \phi(g_1) \circ \phi(g_2)$$

gilt für alle $g_1, g_2 \in G$.

Mit der Aufgabe 8 habt ihr also gezeigt, dass die Abbildung

$$B_n \longrightarrow S_n,$$

die einem Zopf seine Vertauschung der Enden zuordnet ein Gruppenhomomorphismus ist.

2.4 Nicht-Beispiele

Bevor wir uns wieder allgemeinen Eigenschaften widmen, gibt es hier noch ein paar ausgefallenere Beispiele von Mengen und Verknüpfungen, die *keine* Gruppen bilden.

2.4.1 Monoide

Erinnert ihr euch noch an $ANIKA$? Als erstes wollen wir das I weglassen, also eine Menge mit einer Verknüpfung finden, die assoziativ ist und ein neutrales Element bestitzt, aber keine Inversen.[11] So etwas nennt man *Monoid*, insbesondere sind nicht alle Monoiden Gruppen.

Das einfachste Beispiel sind die natürlichen Zahlen (hier einfach mal inklusive Null) $0, 1, 2, 3, \ldots$ mit der Addition. Die ist offensichtlich assoziativ und die Null erfüllt $a+0 = a$, aber 1 und 2 und so weiter haben kein Inverses.

Ein anderes Beispiel wären die ganzen Zahlen mit der Multiplikation als Operation. Diese ist wieder assoziativ und es existiert ein neutrales Element – die Eins – aber außer 1 und -1 haben keine Zahlen ein Inverses.

[11] Das letzte A stand ja für abelsche Gruppen, das interessiert uns jetzt einfach mal gar nicht.

2.4.2 Nichtassoziative Mengen mit Verknüpfungen und neutralem Element

Jetzt betrachten wir einmal die ganzen Zahlen wie gewohnt – aber mit der *Subtraktion* als Gruppenoperation, also $a \circ b := a - b$ für $a, b \in \mathbb{Z}$. Diese Operation hat ein neutrales Element und zwar die Null. Außerdem hat jedes Element ein Inverses und zwar sich selbst, denn $a \circ a = a - a = 0$. Aber die Operation ist nicht assoziativ, denn

$$\begin{aligned} a \circ (b \circ c) &= a - (b - c) = a - b + c \\ (a \circ b) \circ c &= (a - b) - c = a - b - c \end{aligned}$$

und die beiden rechten Seiten sind verschieden für $c \neq 0$. Damit verletzen wir das erste A in $ANIKA$.

3 Eigenschaften von Gruppen und Gruppenhomomorphismen

Natürlich sind uns die Gruppenaxiome alleine nicht ausreichend. Aber damit können wir nun neue Eigenschaften direkt folgern.

Wir können beispielsweise zeigen, dass es in jeder Gruppe $(G, \circ)$ nur ein einziges neutrales Element gibt. Der Beweis dazu:

Angenommen es gibt zwei neutrale Elemente e und e'. Dann gilt

$$e \overset{\substack{e' \text{ ist} \\ \text{neutral}}}{=} e \circ e' \overset{\substack{e \text{ ist} \\ \text{neutral}}}{=} e'.$$

Jetzt sollst du als erstes einmal eine der wichtigsten Rechenregeln nachweisen, die wir auch so gewohnt sind von Zahlen.

Aufgabe 9. *Kürzungsregeln*

Zeige folgende Aussage: Wenn für drei beliebige Elemente a, b, c aus G gilt $a \circ b = c \circ b$, dann folgt auch dass $a = c$ gilt.

In der Definition einer Gruppe haben wir nur vorrausgesetzt, dass ein inverses Element *existiert.* Tatsächlich ist dieses aber auch eindeutig, wie die nächste Aufgabe zeigt.

Aufgabe 10. *Das Inverse Element ist eindeutig*

Zeige, dass zu jedem Element a aus G das inverse Element a^{-1} eindeutig ist.

Aufgabe 11. *Eigenschaften statt Gleichungen*

Zeige, dass für je zwei beliebige Elemente a, b aus G gilt $(a \circ b)^{-1} = b^{-1} \circ a^{-1}$.

Hinweis: Versuche nicht die Gleichung zu beweisen, sondern überlege dir, ob $b^{-1} \circ a^{-1}$ die Eigenschaft von $(a \circ b)^{-1}$ erfüllt und benutze eine frühere Aufgabe.

Aufgabe 12. *Ordnungen und Kommutativität*

a) Beweise folgendes: Gilt für jedes Element a aus G dass $a \circ a = e$, so ist $(G, \circ)$ eine abelsche Gruppe (also kommutativ).

b) Gilt die Umkehrung des Satzes aus a)?

c) Kann der Satz aus a) wie folgt verallgemeinert werden: Gibt es eine natürliche Zahl n derart, dass für jedes Element a einer Gruppe $a^n = e$ gilt[12], so ist die Gruppe kommutativ.

In der Definition eines Gruppenhomomorphismusses haben wir nur vorrausgesetzt, dass die Abbildung die Verknüpfung erhält ($\phi(g_1 \circ g_2) = \phi(g_1) \circ \phi(g_2)$). Eine Gruppe hat aber noch Inverse und ein neutrales Element. Für die müssen wir jedoch nichs extra fordern, wie die nächste Aufgabe zeigt

Aufgabe 13. *Gruppenhomomorphismen*

Beweise, dass für einen Gruppenhomomorphismus $\phi : G \longrightarrow H$ zwischen zwei Gruppen G und H gilt

a) $\phi(e_G) = e_H$, also dass ϕ das neutrale Element auf das neutrale Element abbildet und

b) $\phi(g^{-1}) = (\phi(g))^{-1}$ für alle $g \in G$.

[12] a^n bedeutet hier $\overbrace{a \circ a \circ \cdots \circ a}^{n \text{ mal}}$.