

Winterschule Grimma 2013

Olympiade Gruppe B

7. Februar 2013

Die folgenden Aufgaben sind eigenständig zu lösen. Die Bearbeitungszeit beträgt 3 Stunden, erlaubte Hilfsmittel sind Schreibzeug und Zeichengeräte. Jede Aufgabe ist auf einem gesonderten Blatt zu bearbeiten, pro Aufgabe werden 7 Punkte vergeben.

Aufgabe 1

Es seien α, β, γ Innenwinkel eines nicht entarteten Dreiecks. Man beweise

$$\cot \frac{\alpha}{2} + \cot \frac{\beta}{2} + \cot \frac{\gamma}{2} = \cot \frac{\alpha}{2} \cot \frac{\beta}{2} \cot \frac{\gamma}{2}$$

Aufgabe 2

Sei ABC ein spitzwinkliges Dreieck und P ein Punkt im Inneren des Dreiecks sowie B' und C' die Schnittpunkte von BP bzw. CP mit den gegenüberliegenden Dreiecksseiten. Man bestimme in den folgenden Fällen alle Dreiecke, für die $|PB'| = |PC'|$ gilt.

- P ist der Umkreismittelpunkt
- P ist der Höhenschnittpunkt
- P ist der Inkreismittelpunkt

Aufgabe 3

Man bestimme alle Tripel reeller Zahlen x, y, z , die das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}x + y &= 4x(1 - x^2) \\y + z &= 4y(1 - y^2) \\z + x &= 4z(1 - z^2)\end{aligned}$$

erfüllen.

Aufgabe 4

Man bestimme alle Funktionen $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, die für beliebige ganze Zahlen m, n die Gleichung

$$f(m) \cdot f(n) - 3f(m \cdot n) = 2f(m - n) + 4f(n) - 14$$

erfüllen.