Winterschule Grimma 2013
Olympiade Gruppe A

7. Februar 2013

Die folgenden Aufgaben sind eigenständig zu lösen. Die Bearbeitungszeit beträgt 3 Stunden, erlaubte Hilfsmittel sind Schreibzeug und Zeichengeräte. Jede Aufgabe ist auf einem gesonderten Blatt zu bearbeiten, pro Aufgabe werden 7 Punkte vergeben.

Aufgabe 1

Astrid und Bernd spielen ein Spiel. Auf dem Tisch liegt ein Haufen von Spielsteinen, von dem sie abwechselnd Steine wegnehmen. Wenn die Anzahl ungerade ist, ist der einzige mögliche Zug das Entfernen eines einzelnen Steins, ist die Anzahl gerade, darf der Spieler an der Reihe aussuchen, ob er lediglich einen oder die Hälfte der Steine wegnimmt.

Am Anfang liegen n Steine auf dem Tisch. Wer kann den Sieg erzwingen, wenn Astrid beginnt?

Aufgabe 2

Sei $ABCD$ ein nicht notwendigerweise reguläres Tetraeder. Zeige, dass es mindestens einen Eckpunkt gibt, bei dem die von diesem Eckpunkt ausgehenden Kanten ein nicht entartetes Dreieck bilden können.

Aufgabe 3

Es seien a, b, c positive reelle Zahlen.

Zeige, dass dann

$$a^2b + b^2c + c^2a \leq a^3 + b^3 + c^3$$

gilt.

Aufgabe 4

a) Man bestimme mit Hilfe einer geeigneten kombinatorischen Interpretation einen geschlossenen Ausdruck für

$$\sum_{k=0}^{n} \left[\binom{n}{k} \cdot k \cdot (k-1) \right]$$

b) Man beweise die folgende Formel kombinatorisch.

$$\binom{2n}{n} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \binom{n}{n-i}$$