Ungleichungen Klasse 7
Holger Täubig (Mathecamp 2009)

Was sind Ungleichungen? Welche Ungleichungen gibt es?
Schreibweise:

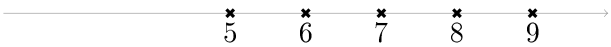
$a < b$	a kleiner b
$a > b$	a größer b
$a \leq b$	a kleiner gleich b
$a \geq b$	$a$größer gleich b
$a < b < c$	$a < b$ und $b < c$

Definition 1: Lösung einer Ungleichung

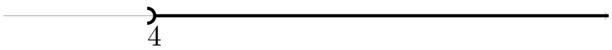
Jede Zahl aus dem Definitionsbereich einer Variablen, die eine gegebene Ungleichung in eine wahre Aussage überführt, heißt Lösung einer Ungleichung.

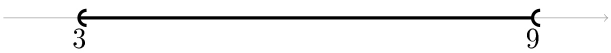
Beispiele Darstellung

Wie kann man die Lösung einer Ungleichung angeben?

$x > 4$ $\quad x \in N$


Lösungsmenge: $\{5, 6, 7, \dots\}$

$x \in Q$


$3 \leq y < 9$ $\quad x \in Q$


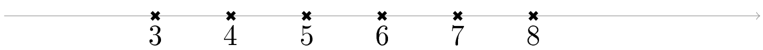
Intervall: $(3, 27[$

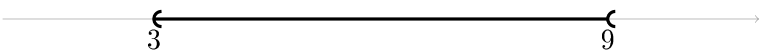
Definition 2: Lösungsmenge einer Ungleichung

Die Menge aller Lösungen einer Ungleichung heißt Lösungsmenge dieser Ungleichung.

Darstellungen der Lösungsmenge

(a) grafisch am Zahlenstrahl

$x \in N$


$x \in Q$


(b) Mengendarstellung

$$L = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$
$$L = \{x : x \in Q \text{ und } 3 \leq x < 9\}$$

(c) Intervalldarstellung

$$L = (3; 9[$$

() einschliesslich der Grenze
[] ausschliesslich der Grenze

Aufgabe 1

Gib die Lösungsmengen folgender Ungleichungen für $x \in Q$ in Intervallschreibweise an!

(a) $1 \leq x \leq 2$

(b) $-17.5 < x < 20.0$

(c) $-2.3 \leq x < -2.1$

(d) $-1 < x \leq 2$

Aufgabe 2

Löse die Ungleichung

$$3x + 2 \leq 17$$

für

(a) $x \in N$

(b) $x \in Z$

(c) $x \in Q$

Lösung jeweils mit Zahlenstrahl,Mengen,Intervall

Definition 3: Äquivalente Ungleichungen

Zwei Ungleichungen heißen zueinander *äquivalent*, wenn ihre Lösungsmengen gleich sind.

Aufgabe 3: Äquivalente Unmgleichungen oder nicht?

$$\begin{aligned}
a &> 3 & a + 2 &> 5 \\
4b &\geq 10 & b &\geq \frac{5}{2} \\
7c + 4 &> 11 & c &\geq 1 \\
d + e &> f & d &> f - e \\
x^2 &> 4 & x &> 2 \text{ aufteilen } x \in Q \text{ und } x \in Q^+ \\
\sqrt{x+2} &\geq 3 & x &\geq 7 \\
|x| &\geq 4 & x &\geq 4
\end{aligned}$$

Definition 4: Äquivalenzumformungen

Für Terme A, B, C sind folgende Ungleichungen zur Ungleichung $A < B$ äquivalent:

(a) $B > A$

(b) $A + C < B + C$

(c) $A \cdot C < B \cdot C$ bzw. $\frac{A}{C} < \frac{B}{C}$, falls C im gesamten Definitionsbereich von $A < B$ definiert und *positiv* ist ($C > 0$).

(d) $A \cdot C > B \cdot C$ bzw. $\frac{A}{C} > \frac{B}{C}$, falls C im gesamten Definitionsbereich von $A < B$ definiert und *negativ* ist ($C < 0$).

Aufgabe 4

Löse die Ungleichungen

(a) $4x - 3 < 3x + 1$ für $x \in N$

(b) $4x - 3 < 3x + 1$ für $x \in Q^+$

Aufgabe 5

Löse die Ungleichung

$$4x - 3 < 3x + 1$$

für $x \in Q$

Aufgabe 6

Löse die Ungleichungen für $x \in Q$

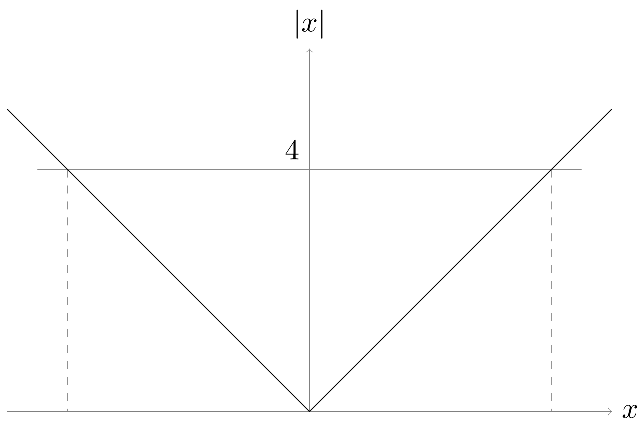
(a) $\frac{2x+4}{3x} < 2$

(b) $\frac{3a-2}{a+1} < 0$

90min

Betragsungleichungen

Beispiel:



$|x| \leq 4$
$|x| > 4$

Fallunterscheidung oder Lösung ablesen
1.Fall: $x \geq 0$ $L =]4; \infty)$
2.Fall: $x < 0$ $L = (-\infty; -4[$
$L = (-\infty; -4[\cup]4; \infty)$

Aufgabe 7

Löse folgende Ungleichungen für $x \in Q$

(a) $|x + 1| \leq 17$

(b) $|4x + 7| > 3$

(c) $x - |x + 2| + |3 - x| < 1$

180min

Beweise für Ungleichungen

Aufgabe 8

Man beweise, dass für alle $a \in N$ gilt

$$\frac{a^2 + 1}{a} \geq 2$$

Aufgabe 9

Man beweise, dass für alle positiven rationalen Zahlen u, v gilt:

$$\frac{u}{v} + \frac{v}{u} \geq 2$$

Definition 5

Für positive rationale Zahlen x, y heißt

$A = \frac{x + y}{2}$	Arithmetisches Mittel
$G = \sqrt{xy}$	Geometrisches Mittel
$H = \frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}$	Harmonisches Mittel

Satz 1: Mittelungleichungen

Für positive rationale Zahlen x, y gilt

arithmetisches Mittel A $\geq$ geometrisches Mittel G $\geq$ harmonisches Mittel H

Beweis

„$A \geq G$“: $\left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right) \geq 0$

„$G \geq H$“: Rückführung auf $A \geq G$

210min

Literatur

[1] Bernd Noack, editor. *Olympiade-Aufgaben für junge Mathematiker: mathematische Aufgaben für 10 - 15jährige.* Aulis-Verl. Deubner, 1989.