Bezirkskomitee Chemnitz
zur Förderung math.-nat. begabter und interessierter Schüler
www.bezirkskomitee.de

Korrespondenzzirkel Mathematik

Arbeitsmaterial für Klasse 7

Inhalt Seite

1. GRUNDLAGEN AUS LOGIK UND MATHEMATIK

1.1. Aussagen und deren Verknüpfung ; einige Gesetze der Aussagenlogik

Eine *Aussage* ist ein sprachliches Gebilde, dem man genau einen Wahrheitswert (W: wahr ; F: falsch) zuordnen kann.
Mit den Aussagenvariablen p , q , r , ... bezeichnen wir beliebige Aussagen.
Betrachtet man nur den Wahrheitswert (nicht den Inhalt) von Aussagen, dann gibt es genau 2 verschiedene Arten von Aussagen, genau 4 verschiedene Paare (p,q) von Aussagen, genau 8 verschiedene Tripel (p,q,r) von Aussagen, ... , genau 2^n verschiedene n-Tupel von Aussagen.

Zu jeder Aussage p gehört deren *Negation " nicht* p " (geschrieben: ~p) .
~p ist genau dann falsch (bzw. wahr), wenn p wahr (bzw. falsch) ist.
Die Negation lässt sich daher durch die nebenstehende Wahrheitswerttabelle definieren.

p	~p
W	F
F	W

Zwei Aussagen lassen sich verknüpfen. Die wichtigsten *Verknüpfungen* sind:

Konjunktion: p *und* q ,geschrieben $p \wedge q$;

Alternative: p *oder* q , geschrieben $p \vee q$;

Implikation: *wenn* p , so q , geschrieben: $p \Rightarrow q$;

Äquivalenz: p *genau dann, wenn* q , geschrieben: $p \Leftrightarrow q$.

Eine *Konjunktion* aus zwei Aussagen ist genau dann wahr, wenn beide Aussagen wahr sind; in allen anderen Fällen ist die Konjunktion falsch.
(In der Alltagssprache sagt man statt "p und q" auch "sowohl p als auch q" , "nicht nur p , sondern auch q" , "zwar p , aber auch q" .)

Eine *Alternative* aus zwei Aussagen ist genau dann falsch, wenn beide Aussagen falsch sind; in allen anderen Fällen ist die Alternative wahr.
(Unterscheide genau zwischen "oder" und "entweder - oder" ; dies sind zwei verschiedene Verknüpfungen.)

Eine *Implikation* aus zwei Aussagen ist genau dann falsch, wenn das Vorderglied p wahr und das Hinterglied q falsch ist; in allen anderen Fällen ist die Implikation wahr.
(Beachte, dass - abweichend vom Alltagssprachgebrauch - Implikationen mit falschem Vorderglied stets als wahr bezeichnet werden! Statt "wenn p, so q" sagt man auch "wenn p, dann q", "aus p folgt q " , " q lässt sich aus p ableiten" , " p ist *hinreichend* für q " oder " q ist *notwendig* für p " .)

Eine *Äquivalenz* aus zwei Aussagen ist genau dann wahr, wenn beide Aussagen denselben Wahrheitswert besitzen; in allen anderen Fällen ist sie falsch.
(Beachte, dass " $p \Leftrightarrow q$ " gleichbedeutend ist mit " $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ " .)

Die Definitionen dieser Verknüpfungen lassen sich durch folgende *Wahrheitswerttabellen* festhalten:

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
W	W	W	W	W	W
W	F	F	W	F	F
F	W	F	W	W	F
F	F	F	F	W	W

Zu jeder mit Hilfe dieser Verknüpfungen gebildeten Aussagenverbindung lässt sich eindeutig eine "Wahrheitswertspalte" ermitteln.

Ist eine Aussagenverbindung unabhängig von den Wahrheitswerten der verknüpften Aussagen stets wahr (d.h. tauchen in der Wahrheitswertspalte nur "W" auf), dann liegt eine *allgemeingültige Aussagenverbindung* (ein *Gesetz der Aussagenlogik*) vor.

Beispiele für Gesetze der Aussagenlogik

a) $\sim(p \wedge \sim p)$; Gesetz vom ausgeschlossenen Widerspruch:
Nie können eine Aussage und ihre Negation gleichzeitig wahr sein.

b) $p \wedge (p \Rightarrow q) \Rightarrow q$; Abtrennungsregel:
Wenn p gilt und aus p die Aussage q folgt, dann gilt auch q .

c) $[(p \vee q) \wedge \sim p] \Rightarrow q$; Gesetz zur Fallunterscheidung:
Wenn $(p \vee q)$ gilt und p nicht gilt, dann muss q gelten.

d) $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$; Kettenschluss; Transitivität der Implikation .

Ist der aus zwei Aussagenverbindungen A , B gebildete Ausdruck $A \Leftrightarrow B$ allgemeingültig (d.h. stimmen die Wahrheitswertspalten von A und B überein), dann sagt man, dass A und B *wertverlaufsgleich* (äquivalent, gleichbedeutend) sind und schreibt $A \equiv B$.

(Wertverlaufsgleiche Aussagenverbindungen drücken denselben Sachverhalt lediglich in verschiedenen Formulierungen aus.)

Beispiele für wertverlaufsgleiche Ausdrücke:

a) $\sim\sim p \equiv p$; Satz von der doppelten Verneinung .

b) $(p \wedge q) \equiv (q \wedge p)$; $(p \vee q) \equiv (q \vee p)$; Kommutativität von Konjunktion bzw. Alternative .

c) $[\sim(p \wedge q)] \equiv (\sim p \vee \sim q)$; $[\sim(p \vee q)] \equiv (\sim p \wedge \sim q)$; Regeln von de-MORGAN .

d) $(p \Rightarrow q) \equiv (\sim q \Rightarrow \sim p) \equiv [\sim(p \wedge \sim q)] \equiv (\sim p \vee q)$;
Umformulierungen einer "Wenn-dann-Aussage" .

e) $[(p \wedge q) \Rightarrow r] \equiv [\sim r \Rightarrow \sim(p \wedge q)] \equiv [(\sim r \wedge q) \Rightarrow \sim p] \equiv [(p \wedge \sim r) \Rightarrow \sim q] \equiv [(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)] \equiv$
$\equiv [q \Rightarrow (p \Rightarrow r)]$; Umformulierungen eines Satzes mit zwei Voraussetzungen .

Aufgabe: Weise nach, dass die unter d) genannten Ausdrücke wertverlaufsgleich sind.

Lösung:

		A			B		C	D
p	q	$p \Rightarrow q$	$\sim q$	$\sim p$	$\sim q \Rightarrow \sim p$	$p \wedge \sim q$	$\sim(p \wedge \sim q)$	$\sim p \vee q$
W	W	W	F	F	W	F	W	W
W	F	F	W	F	F	W	F	F
F	W	W	F	W	W	F	W	W
F	F	W	W	W	W	F	W	W

Aufgabe: Schüler unterhalten sich über einen Wettkampf und äußern folgende Vermutungen:

(1) Bestimmt wird Peter verlieren oder Karl gewinnen.
(2) Ich glaube, dass Peter oder Karl oder auch beide zu den Verlierern gehören werden.
(3) Auf keinen Fall werden sowohl Peter als auch Karl gewinnen.
(4) Es kommt bestimmt nicht vor, dass zwar Peter gewinnt, aber Karl verliert.
(5) Wenn Karl verliert, dann verliert Peter erst recht.

Nach dem Wettkampf stellt sich heraus, dass genau zwei dieser Vermutungen falsch waren. Ermittle die richtigen Vermutungen! Hat Karl gewonnen oder verloren?

Lösung: Bedeute p : "Peter hat gewonnen" ; q: "Karl hat gewonnen" ;
also $\sim p$: "Peter hat verloren" ; $\sim q$: Karl hat verloren" .
Dann haben obige Vermutungen folgende logische Struktur:
(1) $\sim p \vee q$; (2) $\sim p \vee \sim q$; (3) $\sim(p \wedge q)$; (4) $\sim(p \wedge \sim q)$; (5) $\sim q \Rightarrow \sim p$.
Folglich sind (1), (4) und (5) wertverlaufsgleich (sie sind gleichbedeutend mit $p \Rightarrow q$) und stellen daher nur verschiedene Formulierungen ein und derselben Vermutung dar.
Auch (2) und (3) sind nach der Regel von de-MORGAN wertverlaufsgleich.
Folglich können nur (2) und (3) die beiden falschen, (1), (4) und (5) die drei richtigen Vermutungen sein.
Da (3) falsch ist, ist $(p \wedge q)$ wahr, also ist auch q wahr, also hat Karl gewonnen.

1.2. Logische Verwandtschaften zwischen Aussagen

Wahre Aussagen heißen in der Mathematik Lehrsätze oder *Sätze .*

Jeder mathematische Satz lässt sich als Implikation (in der Wenn-dann-Form) formulieren:

$V_1 \wedge V_2 \wedge \ldots \wedge V_n \Rightarrow B$, gelesen:

Wenn (V_1 *und* V_2 *und* ..... *und* V_n) gilt, *dann* gilt auch B .

$V_1 , V_2 , \ldots , V_n$ heißen *Voraussetzungen* des Satzes, B seine *Behauptung .*

1.2.1. Äquivalentes Umformen von Sätzen

Vertauscht man die Behauptung eines Satzes mit einer oder mehreren (u.U. allen) seinen Voraussetzungen *und negiert* die vertauschten Teile, dann entsteht ein zum Ausgangssatz *äquivalenter Satz*, der dasselbe aussagt wie der Ausgangssatz und daher keines erneuten Beweises bedarf.
Man spricht hier von einer *"Kontraposition"* des Satzes; vgl. auch 1.1., S.3, (d) und (e) .

(S) $V \Rightarrow B$; "Wenn $4|x$, dann $2|x$ " .

(K) nicht $B \Rightarrow$ nicht V ; "Wenn nicht $2|x$, dann nicht $4|x$ " .

Mache dir die folgend beschriebenen *Umformungen eines Satzes mit zwei Voraussetzungen* anhand des Stufenwinkelsatzes klar:
(S) $V_1 \wedge V_2 \Rightarrow B$;
(K) nicht $B \Rightarrow$ nicht $(V_1 \wedge V_2)$; ["nicht$(V_1 \wedge V_2)$ ist äquivalent mit "nicht V_1 oder nicht V_2"].
(K_1) (nicht B) $\wedge V_2 \Rightarrow$ (nicht V_1) ;
(K_2) $V_1 \wedge$ (nicht B) $\Rightarrow$ (nicht V_2) ;
Statt "$V_1 \wedge V_2 \Rightarrow B$" kann man auch "$V_1 \Rightarrow (V_2 \Rightarrow B)$" oder "$V_2 \Rightarrow (V_1 \Rightarrow B)$ sagen; dies nennt man *"Herausziehen einer Teilvoraussetzung"*.

1.2.2. Das Umkehren von Sätzen

Man erhält eine *Umkehrung* eines Satzes, indem man seine Behauptung mit einer oder mehreren (u.U. allen)seinen Voraussetzungen *vertauscht .*
Eine Umkehrung einer wahren Aussage (d.h. eines Satzes) muss keine wahre Aussage sein.
Ist sie eine wahre Aussage, dann muss sie *bewiesen*, ist sie eine falsche Aussage, dann muss sie *widerlegt* werden.
Ist eine Umkehrung eines Satzes wiederum ein Satz, dann kann man die beiden in einem Satz *zusammenfassen* , der dann eine "Genau-dann-wenn-Form" besitzt.

Beispiel (für einen Satz mit zwei Voraussetzungen):

(S) $V_1 \wedge V_2 \Rightarrow B$; (U) $B \Rightarrow V_1 \wedge V_2$; (Z) $(V_1 \wedge V_2) \Leftrightarrow B$;
(U_1) $B \wedge V_2 \Rightarrow V_1$; (Z_1) $V_2 \Rightarrow (V_1 \Leftrightarrow B)$;
(U_2) $V_1 \wedge B \Rightarrow V_2$; (Z_2) $V_1 \Rightarrow (V_2 \Leftrightarrow B)$.
Beachte, dass vor dem Zusammenfassen zu (Z_1) zunächst die den Sätzen (S) und (U_1) gemeinsame Teilvoraussetzung V_2 "herausgezogen" wurde.

Der Stufenwinkelsatz und seine Umkehrungen:

(S) Wenn α, β Stufenwinkel und $g||h$, dann $\alpha = \beta$.

(U) Wenn $\alpha = \beta$, dann α, β Stufenwinkel und $g||h$.
Dies ist eine falsche Aussage. Widerlegung: α , β könnten etwa auch Scheitelwinkel sein.

(U_1) Wenn $\alpha = \beta$ und $g|| h$, dann α, β Stufenwinkel .
Dies ist eine falsche Aussage. Widerlegung: α , β könnten auch Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen sein.

(U_2) Wenn α, β Stufenwinkel und $\alpha = \beta$, dann $g||h$.
Dies ist eine wahre Aussage, sie muss bewiesen werden. Sie lässt sich mit der wahren Aussage (S) zu einer Genau-dann-wenn-Aussage zusammenfassen:
(Z_2) Wenn α, β Stufenwinkel sind, dann gilt: $\alpha = \beta$ genau dann, wenn $g||h$.

Merkregel: Vertauschen und Verneinen von B und V ist *"erlaubt"*; es entsteht dabei keine neue Aussage.
Nur Vertauschen oder *nur Verneinen* ist dagegen *"nicht erlaubt"*, da dadurch eine neue Aussäge entsteht, die auch falsch sein kann.

Auftrag:
Lies die Sätze aus dem Material "Einige grundlegende planimetrische Sätze" durch, suche dabei diejenigen heraus, die in Klasse 6 behandelt wurden, und wiederhole sie im Zusammenhang!
Formuliere diese Sätze in der Wenn-dann-Form! Übe an ihnen das äquivalente Umformen und das Umkehren! Achte auf die durch (S) , (U) und (Z) festgehaltenen logischen Beziehungen zwischen den Sätzen!

Wir betrachten folgenden Satz über natürliche Zahlen x , y :

(S) "Wenn x ungerade ist und y ungerade ist, dann ist (x+y) gerade ."
Bilde die Umkehrungen (U), (U_1) und (U_2) und stelle fest, ob es wahre oder falsche Aussagen sind! Widerlege falsche Aussagen durch ein Gegenbeispiel! Ist eine der Umkehrungen vermutlich wahr, dann fasse sie mit (S) zu einem Genau-dann-wenn-Satz zusammen!

1.2.3. Verallgemeinern und Spezialisieren von Sätzen

Fügt man zur den Voraussetzungen bzw. zur Behauptung eines Satzes neue Voraussetzungen bzw. Behauptungen hinzu, dann sagt man, dass die Voraussetzungen des Satzes bzw., seine Behauptung *verschärft* wurden.
Lässt man von den Voraussetzungen bzw. der Behauptung eines Satzes dagegen Teile weg, dann sagt man, dass die Voraussetzungen des Satzes bzw. seine Behauptung *abgeschwächt* wurden.

Eine Aussage, die man durch *Abschwächen der Voraussetzungen* oder durch *Verschärfen der Behauptung* eines Satzes erhält, nennt man *Verallgemeinerung* dieses Satzes.

Eine Aussage, die man durch *Verschärfung der Voraussetzungen* oder durch *Abschwächen der Behauptung* eines Satzes erhält, nennen wir *Spezialisierung* oder Spezialfall dieses Satzes.

Eine *Spezialisierung* eines Satzes ist stets wieder eine wahre Aussage und bedarf daher *keines erneuten Beweises.*
Eine *Verallgemeinerung eines Satzes* muss keine wahre Aussage sein, hier ist ein *Beweis oder* eine *Widerlegung* erforderlich.

Ist ein Satz S_2 eine Verallgemeinerung eines Satzes S_1 , dann ist S_1 eine Spezialisierung von S_2 , und umgekehrt.

(S): $V_1 \wedge V_2 \Rightarrow B_1 \wedge B_2$; Ausgangssatz
(S1): $V_1 \wedge V_2 \wedge V_3 \Rightarrow B_1 \wedge B_2$; Spezialisierung von (S)
(S2) $V_1 \wedge V_2 \Rightarrow B_1$; Spezialisierung von (S)

(S3): $V_1 \Rightarrow B_1 \wedge B_2$; Verallgemeinerung von (S)

(S4): $V_1 \wedge V_2 \Rightarrow B_1 \wedge B_2 \wedge B_3$; Verallgemeinerung von (S)

(S5): $V_1 \wedge V_2 \wedge V_3 \Rightarrow B_1 \wedge B_2 \wedge B_4$; Verallgemeinerung der Spezialisierung (S1)

(S6): $V_1 \Rightarrow B_1$; Verallgemeinerung der Spezialisierung (S2)

Beispiel: Es bedeute:

V_1: ABCD ist ein Parallelogramm ; B_1: $\overline{AC}$ halbiert $\overline{BD}$;

V_2: $\overline{AB} = \overline{BC}$; B_2: $\overline{BD}$ halbiert $\overline{AC}$;

V_3: $\sphericalangle BAC = 90°$; B_3: $AC \perp BD$;

B_4: $\overline{AC} = \overline{BD}$.

(S): In jedem Rhombus (d.h. jedem Parallelogramm mit einem Paar gleich langer benachbarter Seiten) halbieren die Diagonalen einander (d.h. $\overline{AC}$ halbiert $\overline{BD}$ und $\overline{BD}$ halbiert $\overline{AC}$) .

(S1): In jedem Quadrat halbieren die Diagonalen einander.

(S2): In jedem Rhombus halbiert eine der beiden Diagonalen die andere.

(S3): In jedem Parallelogramm halbieren die Diagonalen einander.

(S4): In jedem Rhombus halbieren die Diagonalen einander und stehen aufeinander senkrecht.

(S5): In jedem Quadrat halbieren die Diagonalen einander und sind gleich lang.

(S6): In jedem Parallelogramm halbiert eine der beiden Diagonalen die andere.

Beachte:
Hat man einen Satz entdeckt und bewiesen, dann sollte man stets versuchen, *durch Umkehren oder Verallgemeinern zu einer neuen wahren Aussage zu gelangen*. Dabei ist es wichtig, die Voraussetzung bzw. die Behauptung geschickt in Teilvoraussetzungen bzw. Teilbehauptungen aufzuspalten. Manchmal findet man eine wahre Umkehrung oder Verallgemeinerung erst dann, wenn man vorher den Ausgangssatz spezialisiert hat (vgl. Umkehrung des Höhensatzes).
Wiederhole in der Aufgabensammlung für Klasse 6 den Abschnitt "Umformen und Umkehren von Sätzen" !

1.3. Aussageformen und Mengen

Eine *Aussageform* ist ein Ausdruck mit einer oder mehreren Variablen, der in eine *Aussage* übergeht, wenn man alle vorkommenden Variablen *interpretiert* (d.h. wenn man für die Variablen bestimmte Elemente aus dem Variablengrundbereich einsetzt).

Aussageform	Interpretation	Aussage
$3 \mid x$, $x \in N$	$x = 12$	$3 \mid 12$ (wahr)
$3 \mid x$, $x \in N$	$x = 13$	$3 \mid 13$ (falsch)
$x + 1 < y + 1$, $x,y \in Q_+$	$x = 2$, $y = 3$	$2 + 1 < 3 + 1$ (wahr)
$x + 1 < y + 1$, $x,y \in Q_+$	$x = 4$, $y = 1$	$4 + 1 < 1 + 2$ (falsch)
$ggT(x;y) = z$, $x,y,z \in N$	$x = 12$, $y = 15$, $z = 3$	$ggT(12;15) = 3$ (wahr)
$ggT(x;y) = z$, $x,y,z \in N$	$x = 12$, $y = 15$, $z = 4$	$ggT(12;15) = 4$ (falsch)

Dabei haben wir mit N die Menge der natürlichen, mit Q_+ die Menge der gebrochenen Zahlen bezeichnet.

Die Menge aller $x \in X$, für die eine Aussageform $H(x)$ beim Interpretieren in eine wahre Aussage übergeht, nennt man *Erfüllungsmenge* dieser Aussageform über dem Grundbereich X .
Die Erfüllungsmenge M einer Aussageform $H(x)$; $x \in X$ ist daher stets eine Teilmenge des Grundbereichs X , d.h. es gilt stets $M \subseteq X$.

Entsprechendes gilt für Aussageformen $H(x,y,...,z)$; $x \in X$, $y \in Y$, ... $z \in Z$ mit mehreren Variablen. Besitzt eine Aussageform n Variable, dann besteht ihre Erfüllungsmenge (falls sie nicht leer ist) aus geordneten n-Tupeln (spezielle Paaren, Tripeln usw.) von Elementen.

Aussageform	Erfüllungsmenge
$2 \mid x$; $x \in n$	{ gerade Zahl } = { 0, 2, 4, ..., 2n, ... }
$x \mid 12$; $x \in N$	{ 1, 2, 3, 4, 6, 12 }
AX = BX ; X∈{Punkt der Ebene}	Mittelsenkrechte m_{AB}
$x + y = 3$; $x,y \in N$	{ [0;3], [1;2], [2;1], [3;0] }
$x + y < 3$; $x,y \in N$	{ [0,0], [01], [0;2], [1;0], [1;1], [2;0] }

Bilde weitere Beispiele für Aussageformen und ihre Erfüllungsmengen!
Beachte, dass auch die leere Menge $\emptyset$ als Erfüllungsmenge auftreten kann, etwa bei der Ungleichung $x^2 < 0$, und dass die Erfüllungsmenge auch mit dem Erfüllungsgrundbereich zusammenfallen kann, etwa bei der Ungleichung $x^2 \geq 0$. Im erstgenannten Fall nennt man die Aussageform *kontradiktorisch*, im letztgenannten Fall *allgemeingültig*.

Besitzen zwei Aussageformen (mit demselben Grundbereich) dieselbe Erfüllungsmenge, dann nennt man sie *äquivalent* (über diesem Grundbereich).

Soll ein Element zwei Bedingungen *$H_1(x)$ und $H_2(x)$* erfüllen, dann muss es sowohl in der Erfüllungsmenge M_1 von $H_1(x)$ als auch in der Erfüllungsmenge M_2 von $H_2(x)$ enthalten sein.
Ein sehr einfaches Beispiel soll das Gesagte erläutern:
Zu ermitteln ist die Menge aller ungeraden Teiler von 90 , die zwischen 4 und 10 liegen.

	Aussageform	Erfüllungsmenge
Bedingung I	$x = 2n+1$, $n \in N$	M_1 = { 1, 3, 5, 7, 9, 11, ..., 2n+1, ... }
Bedingung II	$x \mid 90$, $x \in N$	M_2 = { 1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 15, 18, 30, 45, 90 }
Bedingung III	$4 < x < 10$, $x \in N$	M_3 = { 5, 6, 7, 8, 9,}

Durchschnittbildung: $M = M_1 \cap M_2 \cap M_3 = \{ 5, 9 \}$.
Die Zahlen 5 und 9 und nur diese Zahlen erfüllen alle drei Bedingungen.

Eine Aussageform $H(x)$, $x \in X$ kann auf folgende Weisen in eine Aussage überführt werden:

a) Interpretation der Variablen x ; es entsteht eine *Einzelaussage* (z.B. "2 ist eine Primzahl").

b) Bindung der Variablen durch "Für alle x gilt: ... "; es entsteht eine *Allaussage* (z.B. "Alle durch 4 teilbaren Zahlen sind gerade").

c) Bindung der Variablen durch "Es gibt ein x , für das gilt: ... "; es entsteht eine *Existenzaussage* (z.B. "Es gibt eine Primzahl, die gerade ist").

Beachte, dass in der Mathematik das Wort "ein" stets im Sinne von "mindestens ein" verwendet wird und zu unterscheiden ist von "höchstens ein" und "genau ein").

Entsprechendes gilt für Aussageformen mit mehreren Variablen.

1.4. Das Beweisen von Sätzen (speziell von Allaussagen)

Einen Satz *beweisen* heißt, ihn aus wahren Aussagen (in endlich vielen Schritten) durch richtiges Schließen ableiten.

Den Nachweis der Falschheit einer Aussage nennt man *Widerlegung* .

Zum Nachweis der *Wahrheit einer Existenzaussage* genügt die Angabe eines *Beispiels* (z.B.: "Es gibt eine gerade Primzahl"; Beispiel: 2).

Zum Nachweis der *Falschheit einer Allaussage* genügt die Angabe eines *Gegenbeispiel* (z.B. "Alle Primzahlen sind ungerade"; Gegenbeispiel: 2).

Zum Nachweis der Wahrheit eines Allaussage oder der Falschheit einer Existenzaussage muss man einen *Beweis* (im engeren Sinne des Worts) führen.

Ein *(direkter) Beweis* (einer Allaussage) ist erbracht, wenn man von den Voraussetzungen ausgehend in endlich vielen Schritten über abgeleitete Feststellungen zur Behauptung gelangt, wobei jeder Beweisschritt eine Implikation ist und durch Angabe des verwendeten "Beweismittels" begründet wird. Als "Beweismittel" dürfen bewiesene Sätze, Formeln, Definitionen, Axiome und Umformungsregeln verwendet werden.
Jeder solche Beweis lässt sich in Form eines *Beweisschemas* darstellen. Bei dieser Darstellungsform kann man leicht nachprüfen, ob ein Beweis exakt und vollständig ist. Der zugehörige Lösungsplan lässt sich stets in Form eines *Lösungsgraphen* festhalten.

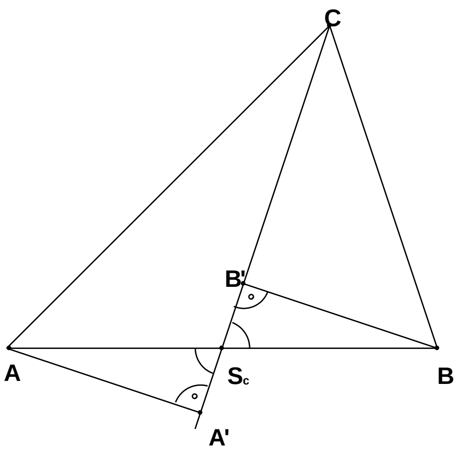
Bei *geometrischen Beweisen* darf man sich nicht auf die Anschauung berufen. Beweisfiguren dienen nur dazu, verwendete Bezeichnungen festzuhalten.
Taucht eine für den Beweis benötigte Bezeichnung nicht in den Voraussetzungen auf, dann führt man sie durch eine *"Zusatzvorausetzung" (ZV)* ein (oder hält sie in der Beweisfigur fest).

Satz:

Ist $\overrightarrow{CS_c}$ Seitenhalbierende eines Dreiecks ABC , dann haben A und B von dieser Geraden den gleichen Abstand.

V: $\overrightarrow{CS_c}$ ist Seitenhalbierende von $\triangle ABC$;

Beh.: $d(A;CS_c) = d(B;CS_c)$.



Beweis (in Form eines Beweisschemas):

Für $\overline{AC} = \overline{BC}$ gilt der Satz offensichtlich; sei $\overline{AC} \neq \overline{BC}$.

ZV: Sei A' bzw. B' der Fußpunkt des Lots von A bzw. B auf die Gerade CS_c :

V	$\Rightarrow$	(1)	$\overline{AS}_c = \overline{BS}_c$;	[Definition Seitenhalbierende"] .
V	$\Rightarrow$	(2)	$\sphericalangle AS_cA' = \sphericalangle BS_cB'$;	[Scheitelwinkelsatz]
ZV	$\Rightarrow$	(3)	$\sphericalangle S_cA'A = \sphericalangle S_cB'B$;	[Definition "Lot"] .
(1),(2),(3)	$\Rightarrow$	(4)	$\triangle S_cA'A \cong \triangle S_cB'B$;	[Kongruenzsatz wsw] .
(4)	$\Rightarrow$	(5)	$\overline{AA'} = \overline{BB'}$;	[entsprechende Seiten in kongruenten Dreiecken] .
(5)	$\Rightarrow$	Beh.:	$d(A;CS_c) = d(B;CS_c)$;	[Definition "Abstand"] .

Damit ist gezeigt, dass der Satz ($V \Rightarrow$ Beh.) gilt, w.z.b.w. .

Lösungsgraph (vgl. auch das Material "Einige Regeln", Seite 1) :

V — $\overline{AS}_c = \overline{BS}_c$ ———
V — $\sphericalangle AS_cA' = \sphericalangle BS_cB'$ |—— $\triangle S_cA'A \cong \triangle S_cB'B$ —— $\overline{AA'} = \overline{BB'}$ ——— $\boxed{\text{Beh.}}$
ZV — $\sphericalangle S_cA'A = \sphericalangle S_cB'B$ —

1.5. Das Lösen von Bestimmungsaufgaben

Bei vielen Bestimmungsaufgaben ist die Menge aller Elemente aus einer vorgegebenen Menge zu ermitteln, die gewisse vorgegebene Bedingungen erfüllen. Jede solche *Bedingung* lässt sich als *Aussageform* schreiben.
(Als wichtiger Spezialfall treten *Gleichungen* auf.)
Allgemein: *Zu einer Konjunktion von Aussageformen* - speziell zu einer einzigen Aussageform - ist die *zugehörige Erfüllungsmenge* zu *bestimmen .*
(Dies wird etwa bei den meisten zahlentheoretischen Bestimmungsaufgaben gefordert.)
Werden geordnete Paare, Tripel bzw. n-Tupel gesucht, dann werden die zugehörigen Bedingungen durch Aussageformen mit 2 , 3 bzw. n Variablen festgehalten.
(Dies ist etwa bei *Gleichungssystemen* mit mehreren Variablen sowie bei vielen logisch-kombinatorischen Bestimmungsaufgaben der Fall.)

Die Lösung einer solchen Aufgabe muss stets enthalten:

(a) Die Angabe der gesuchten *Erfüllungsmenge* (der gesuchten Elemente, Paare usw.) .

(b) Den *Einzigkeitsnachweis ,* in dem gezeigt wird:
"Wenn ein Element alle gestellten Bedingungen erfüllt, dann gehört es zur angegebenen Erfüllungsmenge".
(Oft spricht man hierbei von einer *"begründeten Herleitung"* .)

(c) Den *Existenznachweis ,* in dem gezeigt wird:
"Wenn ein Element zur angegebenen Erfüllungsmenge gehört, dann erfüllt es alle gestellten Bedingungen".
(Manchmal nennt man diesen Nachweis auch *"Probe".*)

Meist stellt man die Lösung einer solchen Aufgabe wie folgt dar:
"Angenommen, die Aufgabe besitzt eine Lösung. Dann müsste gelten: ....
Folglich gilt: Wenn die Aufgabe Lösungen besitzt, dann können es nur die folgenden sein: .... (*Einzigkeitsnachweis* nebst Angabe der *Erfüllungsmenge*.)
Es sind dies alles tatsächlich Lösungen, denn es gilt: ....
(Probe als *Existenznachweis*.)

Es gibt auch Bestimmungsaufgaben, bei denen *Daten a, b, ..., c* und Beziehunge*n* gegeben sind und eine *Unbekannte x* gesucht wird, wobei diese Unbekannte durch die Daten ausgedrückt werden soll: $x = f(a,b,...,c)$.
Meist ist dabei vom Sachverhalt her klar, dass es genau ein solches Element gibt.
(Dies ist etwa bei *Sachaufgaben* und bei *geometrischen Bestimmungsaufgaben* meist der Fall.)
Bei solchen Aufgaben muss man in der Regel zunächst *Beziehungen zwischen den gegebenen, den gesuchten und günstig gewählten Hilfsgrößen suchen* , bis man als *"Ansatz"* ein *Gleichungssystem* (speziell eine einzelne Gleichung) erhält, das es (durch Eliminieren der Hilfsgrößen) gestattet, die gesuchte Größe durch die gegebenen Größen auszudrücken.

Lies im Material "Einige Regeln" auf den Seiten 3, 4, 7, 8,10, 12, 15, 16, jeweils die Regeln (3), (3.1) und (3.2) durch!

2. GEOMETRIE

2.1 K o n s t r u k t i o n s a u f g a b e n

Eine jede Konstruktionsaufgabe lässt sich so *umformulieren*, dass nur Punkte und Beziehungen zwischen ihnen gegeben und dass *nur Punkte gesucht* sind.
Jede *Konstruktionsbeschreibung* besteht aus einer endlichen Folge von Schritten, wobei in jedem Schritt aus gegebenen oder bereits konstruierten geometrischen Gebilden ein neues geometrisches Gebilde konstruiert wird. Da nur Zirkel und Lineal (ohne Maßeinteilung) als Zeichengeräte zugelassen sind, können als solche Objekte nur Punkte, Geraden, Strahlen, Strecken Kreise oder Kreisbogen auftreten. Da sich diese Objekte stets durch Punkte eindeutig festlegen lassen, läuft jede Konstruktion letztlich auf die *Konstruktion von Punkten* hinaus.
Jeder *Punkt* lässt sich *als Durchschnitt zweier geometrischer Örter* konstruieren.
Ein geometrischer Ort ist eine Menge von Punkten, die eine bestimmte Bedingung (Beziehung, allgemein Aussageform) erfüllen.
Präge dir die im Material "Geometrische Örter" genannten ersten vier geometrischen Örter gut ein!
Lies in "Einige Regeln" auf Seite 7 die Regeln (1), (3.1), (2.1) und (2.2) zur Lösung von Konstruktionsaufgaben durch! Beachte vor allem die in (3.1) geschilderte *Methode der geometrischen Örter* !
Achte auf den Zusammenhang zur Methode der Durchschnittsbildung von Erfüllungsmengen in Abschnitt 1.3., Seite 9/10 !

Konstruktionsbeschreibungen werden wir in einer Kurzform notieren, die es gestattet, die Exaktheit und Vollständigkeit der Lösung leicht nachzuprüfen. Ferner werden wir bei jedem Schritt untersuchen, ob (bzw. unter welchen Bedingungen) dieser Schritt eindeutig ausführbar ist.
Wir verabreden folgende *abkürzende Bezeichnungsweisen* :

$k(M; r = 4cm)$: Kreis mit dem Mittelpunkt M , dessen Radius 4cm lang ist .

$k(M;r) \cap g = \{S, S_1\}$: Der Kreis k schneidet die Gerade g in den beiden Punkten S und S_1 .

$P \in AB$: Der Punkt P liegt auf der Geraden AB ; die Gerade AB geht durch den Punkt P .

$g \cap h = \{S\}$; $g \perp h$: Die Geraden g und h schneiden einander im Punkt S und stehen senkrecht aufeinander.

m_{AB} : Die Mittelsenkrechte der Strecke $\overline{AB}$.

$\overline{AH}_a$, $\overline{AS}_a$, $\overline{AW}_a$: Die zum Punkt A gehörende Höhe, Seitenhalbierende bzw. Winkelhalbierende im Dreieck ABC .

Beispiel: Zu konstruieren sind alle (untereinander nicht kongruenten) Dreiecke ABC, die folgende Bedingungen erfüllen:
(a) $\overline{AC} = b = 4cm$; (b) $\overline{AB} = c = 6cm$; (c) $\overline{CH}_c = h = 3cm$; (d) $\overline{CH}_c$ ist Höhe in $\triangle ABC$.

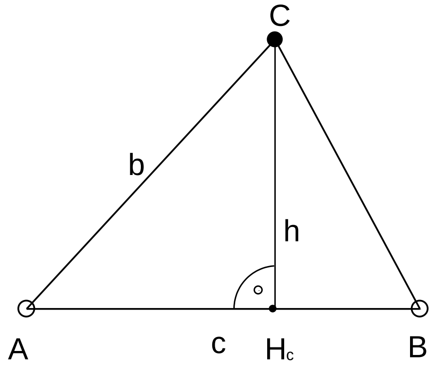
Hier ist es günstig, mit Bedingung (b) zu beginnen. Das führt zu folgender *Umformulierung* der Aufgabe:

Geg.: Punkte A , B mit $\overline{AB} = c$;

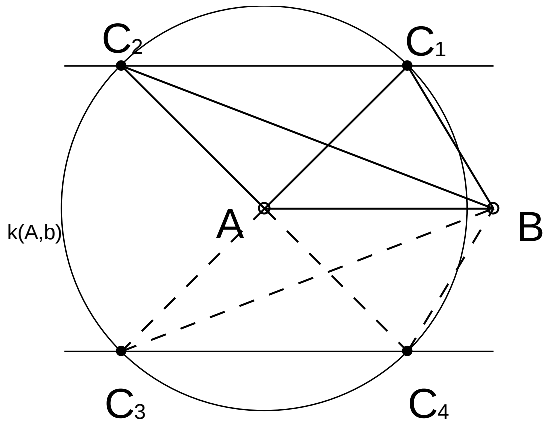
Ges.: Punkt C .

Bedingungen	geometrischer Ort
1) $\overline{AC} = b$	$k(A;b)$
2) $d(C;AB) = h$	Parallelenpaar $(g;g_1)$

Durchschnittsbildung: $k(A;b) \cap (g;g_1) = \{ C_1, C_2, C_3, C_4 \}$.



Konstruktionsbeschreibung:



(1) $\overline{AB} = c = 6cm$; (eindeutig konstruierbar) .

(2) Parallelenpaar $(g;g_1)$ zur Geraden AB im Abstand $h = 3cm$; (eindeutig konstruierbar).

(3) $k(A;\ b = 4cm) \cap (g;g_1) = \{ C_1, C_2, C_3, C_4 \}$; (es gibt 4 Schnittpunkte, weil $b > h$ gilt).

$\triangle ABC_1$ und $\triangle ABC_2$ sind *zwei (verschiedene) Lösungen* der Aufgabe; $\triangle ABC_3$ und $\triangle ABC_4$ sind zu diesen Dreiecke kongruent und werden daher nicht als weitere Lösungen angesehen.

Auch Konstruktionsaufgaben sind *Bestimmungsaufgaben*, bei deren Lösung ein Einzigkeitsnachweis und ein Existenznachweis geführt werden müssen (vgl. Abschnitt 1.5., S.9) .
Sind die Daten nicht konkret, sondern nur als *Parameter* gegeben, dann ist außerdem zu untersuchen, unter welchen Bedingungen Lösungen existieren und wie viel verschiedene Lösungen existieren können.

Zur *vollständigen Lösung einer Konstruktionsaufgabe* gehören:

I) *Einzigkeitsnachweis :*
Es ist zu zeigen: "Wenn ein geometrisches Objekt alle gegebenen Bedingungen erfüllt, dann lässt es sich auf folgende Weise konstruieren: .... "

II) *Konstruktionsbeschreibung* nebst Angabe der Bedingungen, unter denen die einzelnen Schritte (ein- oder mehrdeutig) ausführbar sind.

IIa) *Determination:*
Angabe der Bedingungen, unter denen keine, eine oder mehrere Lösungen existieren.

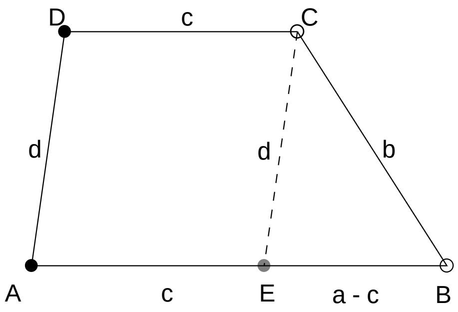
III) *Existenznachweis:*
Es ist zu zeigen: "Wenn ein geometrisches Objekt in der beschriebenen Weise konstruiert wurde, dann erfüllt dieses geometrische Objekt alle gestellten Bedingungen, ist also eine Lösung der Aufgabe."

Damit ist dann gezeigt, dass durch die Konstruktionsbeschreibung ein Verfahren angegeben wird, das es gestattet, aus den gegebenen Daten alle Figuren und auch nur solche Figuren zu konstruieren, die alle gestellten Bedingungen erfüllen.
Zusätzlich kann man noch die Anfertigung einer *Konstruktionszeichnung* fordern.

Beispiel:

Zu konstruieren sind alle Vierecke ABCD , die folgende Bedingungen erfüllen:

(a) $\overline{AB} = a$; (b) $\overline{BC} = b$; (c) $\overline{CD} = c$ mit $c < a$;
(d) $\overline{DA} = d$; (e) ABCD ist ein Trapez mit $AB \| CD$.



I) Wenn ein Viereck ABCD die gegebenen Bedingungen erfüllt, dann gilt:
Wegen (a) und (c) gibt es genau einen (Hilfs-) Punkt $E \in \overline{AB}$, für den $\overline{AE} = c$ und $\overline{EB} = a - c$ gilt.
Wegen (c) und (e) gilt dann $\overline{AE} = \overline{CD}$ und $AE \| CD$, also ist AECD ein Parallelogramm, für das dann wegen (d) auch $\overline{EC} = \overline{AD} = d$ gilt.

Folglich gilt für das (Hilfs-) Dreieck EBC : $\overline{EB} = a - c$, $\overline{EC} = d$ und wegen (b) auch $\overline{BC} = b$.
A liegt dann auf BE und wegen (a) gilt $\overline{AB} = a$.
Für D gilt dann $\overline{AD} = d$ und $\overline{CD} = c$.
Folglich lässt sich jede Lösung ABCD unserer Aufgabe *auf folgende Weise konstruieren:*

II) (1) Dreieck EBC aus $\overline{EB} = a - c$, $\overline{BC} = b$ und $\overline{CE} = d$; [eindeutig konstruierbar, falls folgende Dreiecksungleichungen erfüllt sind:
$b+d > a - c$ und $(a - c) + b > d$ und $(a - c)+d > b$] .
(2) $A\in\overline{BE}$ mit $\overline{AB} = a$; [eindeutig konstruierbar].
(3) D so , dass im Viereck AECD gilt: $\overline{AD} = d$ und $\overline{CD} = c$; [eindeutig konstruierbar] .

IIa) Es gibt genau eine Lösung ABCD , wenn alle drei in (1) genannten Ungleichungen erfüllt sind; ist eine der Ungleichungen nicht erfüllt, dann gibt es keine Lösung.

III) Wegen (1) gilt $\overline{BC} = b$; wegen (3) gilt $\overline{CD} = c$ und $\overline{DA} = d$; wegen (2) gilt $\overline{AB} = a$; folglich erfüllt ABCD die Bedingungen (a), (b), (c), (d) .
Wegen (1) und (2) gilt $\overline{AE} = \overline{AB} - \overline{EB} = a - (a - c) = c$ und daher $\overline{AE} = \overline{CD}$. Wegen (1) und (3) wird $\overline{AD} = \overline{EC} = d$. Folglich ist AECD (als Viereck mit gleich langen Gegenseiten) ein Parallelogramm und es gilt (laut Definition von "Parallelogramm") AE||CD .
Wegen (1) und (2) gilt $E\in\overline{AB}$, also auch AB||CD, folglich ist *ABCD ein Trapez* , und auch Bedingung (e) ist erfüllt.
Folglich erfüllt jedes auf obige Weise konstruierte Viereck ABCD alle gestellten Bedingungen, d.h. ist Lösung unserer Aufgabe.

2.2. O r t s a u f g a b e n

Geometrische Ortsaufgaben sind spezielle *Bestimmungsaufgaben*.
Gesucht ist jeweils eine Punktmenge M , deren Elemente X einer Bedingung genügen, die sich in Form einer Aussageform H(X) schreiben lässt.
Der geometrische Ort M ist die Erfüllungsmenge von H(X) . Wenn nicht ausdrücklich etwas anderes angegeben ist, betrachten wir hierbei stets nur Punktmengen in der Ebene.
Wiederhole in diesem Zusammenhang die Abschnitte 1.3. und 1.5. und lies im Material "Einige Regeln" die Ausführungen auf Seite 8/9 .

Um eine solche Aufgabe zu lösen, versucht man zunächst, den gesuchten *geometrischen Ort* zu *erraten* (indem man eine genaue Figur zeichnet und einige Spezialfälle untersucht).
Ist dies gelungen, dann sind folgende *Sätze* zu *beweisen*:

(S) "Wenn $X\in M$, dann gilt H(X)" oder "Wenn H(X) nicht gilt, dann $X\notin M$ " .

(U) "Wenn H(X) gilt, dann $X\in M$" oder "Wenn $X \notin M$, dann gilt H(X) nicht" .

Damit ist bewiesen: (Z) X liegt auf M *genau dann*, wenn die Bedingung H(X) erfüllt ist .

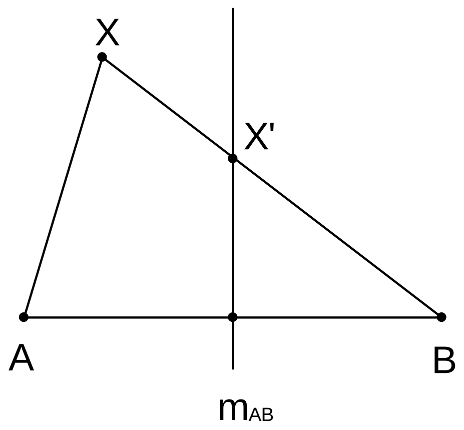
Der *Beweis von (S)* entspricht dem *<u>Existenznachweis</u>*, der *Beweis von (U)* dem *<u>Einzigkeitsnachweis</u>*.
Beachte, dass man beim Beweisen eine Umkehrung auf Gedanken zurückgreifen kann, die beim Beweis des Ausgangssatzes nützlich waren.

Beispiel:

Ermittle die Menge aller Punkte X (einer Ebene), die (für $A\neq B$) die *Bedingung* $\overline{AX} = \overline{BX}$ erfüllen.

Der gesuchte geometrische Ort ist die *Mittelsenkrechte* m_{AB} der Strecke $\overline{AB}$.

Um dies zu zeigen, ist zweierlei zu beweisen:



(S) Wenn $X \in m_{AB}$, dann gilt $\overline{AX} = \overline{BX}$.

Auftrag: Beweise diesen Satz!

(U) Wenn $X \notin m_{AB}$, dann gilt $\overline{AX} \neq \overline{BX}$.

Beweis:

Wenn $X \notin m_{AB}$, dann tritt genau einer der folgenden *zwei Fälle* ein:

(1) Strecke $\overline{BX}$ schneidet m_{AB} im Punkt X' ;

(2) Strecke $\overline{AX}$ schneidet m_{AB} im Punkt X'' .

Im Fall (1) entsteht ein Dreieck AX'X (das auch zu einer doppelt durchlaufenen Strecke entarten kann), und laut Dreiecksungleichung gilt

$$\overline{AX'} + \overline{XX''} > \overline{AX} .$$

Wegen $X' \in m_{AB}$ gilt $\overline{AX'} = \overline{BX'}$,

also gilt wegen $\overline{XX'} + \overline{XX'} = \overline{BX}$

die Beziehung $\overline{BX} > \overline{AX}$.

Bei Fall (2) folgt analog $\overline{BX} < \overline{AX}$. Folglich gilt stets $\overline{AX} \neq \overline{BX}$; w.z.b.w. .

3. ZAHLENTHEORIE

Zur Zahlentheorie rechnen wir alle Aufgaben, die über dem Bereich der natürlichen oder über dem Bereich der ganzen Zahlen zu lösen sind.

3.1. Grundgleichung der Zahlentheorie ; Euklidischer Algorithmus

Zu jeder ganzen Zahl a und jeder positiven ganzen Zahl m gibt es stets genau ein Paar q , r von ganzen Zahlen, so dass gilt:

$a = qm + r$ mit $0 \leq r < m$; *Grundgleichung der Zahlentheorie .*

Dabei heißt r der *" positiv* (nichtnegativ) *kleinste Rest"* zu gegebenem a und m .

Beispiele: Wenn a = 8 und m = 5, dann q = 1 und r = 3 ;
Wenn a = 8 und m = 9, dann q = 0 und r = 8 ;
Wenn a = -5 und m = 3, dann q = -2 und r = 1 .

Bilde weitere Beispiele und mache dir folgendes klar:
Zu gegebenen m gibt es stets genau m verschiedene positiv kleinste Reste:
$r \in \{0,1,2,....,m-1\}$.

Es gibt auch stets m *"absolut kleinste Reste* $\bar{r}$ *"* .

Beispiele: m = 6 : $r \in \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5 \}$ und $\bar{r} \in \{ -2, -1, 0, 1, 2, 3 \}$.
m = 5 : $r \in \{ 0, 1, 2, 3, 4 \}$ und $\bar{r} \in \{ -2, -1 ,0, 1, 2 \}$.
Wenn a = 8 und m = 9 , dann $\bar{q} = 1$ und $\bar{r} = -1$.
Wenn a = 8 und m = 5 , dann $\bar{q} = 2$ und $\bar{r} = -2$.

Man kann zu jedem Paar (a;b) von natürlichen Zahlen stets eindeutig den (kleinsten nichtnegativen) Rest r bestimmen, den a bei Division durch b ($\neq 0$) lässt.
Dies liefert die Grundlage für ein Verfahren zur Ermittlung des größten gemeinsamen Teilers zweier natürlicher Zahlen, das *Euklidischer Algorithmus* genannt wird.

Es gilt: $a = bq + r$ mit $0 \le r < b$. Analog gehört zu $(b;r)$ der Rest r_1 : $b = rq_1 + r_1$ mit $0 \le r_1 < r$ .Zu $(r;r_1)$ gehört dann der Rest r_2 : $r = r_1q_2 + r_2$ mit $0 \le r_2 < r_1$; usw.
Daher gilt stets $r > r_1 > r_2 > r_3 > \ldots$, und da es sich hier um natürliche Zahlen handelt, muss es schließlich einen Rest r_n geben, für den $r_n = 0$ gilt.

Es lässt sich zeigen, dass *der letzte von 0 verschiedene Rest* der *ggT(a;b)* ist. Weiterhin lässt sich zeigen, dass man statt der kleinsten nichtnegativen Reste auch die absolut kleinsten Reste verwenden darf. Dies empfiehlt sich sogar, weil man auf diese Weise meist mit weniger Rechenschritten auskommt.

Beispiel: Berechnung von ggT(1573;637) .

1573	= 637·2 + 299	1537	=	13·49·2 + 13·23	= 13(98 + 23)	= *13·121*
637	= 299·2 + 39	637	=	13·23·2 + 13·3	= 13(46 + 3)	= *13·49*
299	= 39·8 - **13**	299	=	13·3·8 - 13	= 13·23	
39	= 13·3 + 0					

ggT(1573;637) = 13 .
Die "Rückrechnung" (durch schrittweises Einsetzen der erhaltenen Zerlegungen) liefert schließlich die gewünschte Faktorzerlegung.

Auftrag: Berechne ggT(5083;476) und die zugehörige Faktorzerlegung! Rechne selbstgewählte Beispiele, bis du den Algorithmus beherrschst!

3.2. Teilbarkeitslehre

Ist der zu einem geordneten Paar $(a;b)$ von natürlichen Zahlen gehörende Rest in der Grundgleichung gleich Null, dann sagt man, dass a durch b *teilbar* ist, dass b ein *Teiler* von a ist.

Man definiert die Teilbarkeitsbeziehung auch für ganze Zahlen. Es ist allerdings üblich, als Teiler einer gegebenen Zahl nur positive ganze Zahlen anzugeben.

Seien a , b , c und q ganze Zahlen.
Definition: $a|b =_{Def}$ Es gibt ein q , so dass $b = qa$.

Sätze:

SI) $a|b$ und $b|c \Rightarrow a|c$; (Transitivität der Teilbarkeitsbeziehung)

SII) $a|b$ und $a|c \Rightarrow a|(b + c)$;

UII) $a|b$ und $a|(b + c) \Rightarrow a|c$;

SIII) $a|b$ oder $a|c \Rightarrow a|bc$;

SIV) $a|c$ und $b|c$ und a, b teilerfremd $\Rightarrow ab|c$;

UIV) $ab|c \Rightarrow a|c$ und $b|c$.

Definition: Eine natürliche Zahl heißt *Primzahl* genau dann, wenn sie genau zwei verschiedene Teiler besitzt (nämlich sich selbst und die 1) .

Satz: Jede natürliche Zahl größer 1 ist entweder eine Primzahl oder lässt sich auf genau eine Art als Produkt von Primzahlen darstellen.

Satz: Es gibt unendlich viele Primzahlen.

3.3. Das Rechnen mit Kongruenzen (Modulrechnung)

Zwei ganze Zahlen, die bei Division durch eine natürliche Zahl $m \neq 0$ denselben Rest lassen (und deren Differenz dann stets durch m teilbar ist) nennt man <u>*kongruent nach dem Modul m*</u> und schreibt dafür

$$a \equiv b \mod m \quad \text{oder kürzer} \quad a \equiv b \ (m) \ .$$

Definition: $a \equiv b\ (m) =_{Def} m|(a - b)$; dabei gelte $a,b,m \in Z$, $m > 0$.

Beispiele:

$73 \equiv 38\ (7)$, weil $7|(73 - 38)$, d.h. $7|35$.

$29 \equiv -59\ (11)$, weil $11|(29 + 59)$, d.h. $11|88$.

$71 \equiv 23 \equiv 7 \equiv -1 \equiv -9\ (8)$, weil alle diese Zahlen bei Division durch 8 denselben (positiv kleinsten bzw. absolut kleinsten) Rest lassen, bzw. weil die Differenzen beliebiger Paare dieser Zahlen stets durch 8 teilbar sind.

Beachte: Aus den Definitionen folgt, dass $a|b$ gleichbedeutend ist mit $b \equiv 0\ (a)$.
Man kann daher *Teilbarkeitsaussagen in die Sprache der Kongruenzen übersetzen*.

Überzeuge dich, dass aus den Definitionen folgt, dass folgende Ausdrücke *äquivalent* (gleichbedeutend) sind:
" a und b lassen bei Division durch m den gleichen Rest " äq "$a \equiv b\ (m)$" äq "$a = qm + b$" (d.h., Kongruenzen lassen sich in Gleichungen verwandeln) .

Wie auch die Gleichheit, besitzt die Kongruenz folgende wichtige *Eigenschaften* :

<u>*Reflexivität*</u>*:* Stets gilt $a \equiv a\ (m)$.

<u>*Symmetrie*</u>*:* Wenn $a \equiv b\ (m)$, dann $b \equiv a\ (m)$.

<u>*Transitivität*</u>*:* Wenn $a \equiv b\ (m)$ und $b \equiv c\ (m)$, dann $a \equiv c\ (m)$.

Auftrag: Beweise diese Eigenschaften! (Übersetze in die Sprache der Gleichungen und leite die so erhaltenen Aussagen über Gleichungen ab.)

Es gelten folgende *Sätze :*

(I) $a \equiv b\ (m)$ und $c \equiv d\ (m)$ $\Rightarrow$ $a \pm c \equiv b \pm d\ (m)$.

(II) $a \equiv b\ (m)$ und $c \equiv d\ (m)$ $\Rightarrow$ $ac \equiv bd\ (m)$.

(III) $a \equiv b\ (m)$ $\Rightarrow$ $a^n \equiv b^n\ (m)$.

(IV) $ab \equiv 0\ (p)$ und p ist Primzahl $\Rightarrow$ $a \equiv 0\ (p)$ oder $b \equiv 0\ (p)$.

(V) $ac \equiv bc\ (m)$ und $c \not\equiv 0\ (m)$ und $ggT(c;m) = d$ $\Rightarrow$ $a \equiv b\ (\frac{m}{d})$.

(VI) Wenn m und c teilerfremd sind, dann gilt: $ac \equiv bc\ (m)$ und $c \not\equiv 0\ (m)$ $\Rightarrow$ $a \equiv b\ (m)$

Beispiele zu (V) und (VI) :

$45 \equiv 27\ (6)$ und $ggT(9;6) = 3$ $\Rightarrow$ $5 \equiv 3\ (2)$; (Division durch 9) .

$72 \equiv 27\ (5)$ und $ggT(9;5) = 1$ $\Rightarrow$ $8 \equiv 3\ (5)$; (Division durch 9) .

Hinweise:

Da alle Zahlen bei Division durch 1 den Rest 0 lassen, sind sie bezüglich dieser Division stets restegleich, d.h. es gilt stets $a \equiv b \ (1)$. Daher ist nur der Fall $m > 1$ von Interesse.

Beachte, dass in (I) und (II) als Spezialfall die Aussage enthalten ist, dass man (wie bei Gleichungen) auf beiden Seiten einer Kongruenz die gleiche Zahl addieren oder mit der gleichen Zahl multiplizieren darf.
Bezüglich des Dividierens auf beiden Seiten verhalten sich Kongruenzen dagegen etwas anders als Gleichungen.

Beachte im Zusammenhang mit (IV), dass sich der Satz "Ein Produkt wird Null genau dann, wenn mindestens ein Faktor Null wird" nicht auf Kongruenzen übertragen lässt!
So gilt etwa $2 \cdot 3 \equiv 0 \ (6)$, aber weder $2 \equiv 0 \ (6)$ noch $3 \equiv 0 \ (6)$.
Mache dir klar, inwiefern Satz (V) den Satz (VI) als Spezialfall enthält!

Das *Rechnen mit Kongruenzen* lässt sich beim Lösen von zahlentheoretischen Beweis- und Bestimmungsaufgaben oft *als günstiges Hilfsmittel* einsetzen. Um etwa den Rest zu berechnen, den eine Potenz bei Division durch 9 lässt, kann man wie folgt vorgehen:

$178^{12} \equiv (-2)^{12} \equiv (-8)^4 \equiv (+1)^4 \equiv 1 \ (9)$.

Hinweis auf den Beweis von Satz (I):

$$\left.\begin{array}{l} a \equiv b \ (m) \Rightarrow a = b + q_1 m \\ c \equiv d \ (m) \Rightarrow c = d + q_2 m \end{array}\right\} \Rightarrow a + c = b + d + (q_1 + q_2)m = b + d + qm \Rightarrow a + c \equiv b + d \ (m)$$

4. GLEICHUNGEN UND UNGLEICHUNGEN

4.1. Einige Begriffe

(Wiederhole in diesem Zusammenhang den Abschnitt 1.3.)

Ein Zeichen für ein *bestimmtes* (festes) Element aus einer vorgegebenen Menge nennt man eine *Konstante* .

Ein Zeichen für ein *beliebiges* Element einer vorgegebenen Menge M nennt man *Variable* mit dem *Variablengrundbereich M .*
Eine Variable *interpretieren* heißt, für diese Variable eine Konstante aus dem betreffenden Variablengrundbereich einsetzen.

Ein Ausdruck $T(x,y,...,z)$ mit den Variablen $x \in X$, $y \in Y$, ... , $z \in Z$ heißt *Term* genau dann, wenn er bei Interpretation aller Variablen in eine Konstante (d.h. die Bezeichnung für ein bestimmtes Element) übergeht.

Beispiele:

$ggT(x;y)$, $x,y \in N$ geht bei der Interpretation $x = 6$, $y = 15$ über in die Konstante 3 .
$\frac{xy - 2x - y}{x + 2}$, $x,y \in Q$ geht bei der Interpretation $x = 2$, $y = \frac{1}{2}$ über in die Konstante $-\frac{7}{8}$.

Die Menge aller Elemente aus dem vorgegebenen Variablengrundbereich eines Terms $T(x)$, für die dieser Term erklärt ist, heißt *Definitionsbereich des Terms* .

Beispiele:

$\frac{x+7}{(x-5)(x+3)}$, $x \in Q$ hat als Definitionsbereich alle rationalen Zahlen außer 5 und -3 .

$\sqrt{x-2}$, $x \in Q$ hat als Definitionsbereich alle rationalen Zahlen, die größer oder gleich 2 sind.

Merke: $\frac{T_1(x)}{T_2(x)}$ hat als Definitionsbereich alle rationalen Zahlen mit Ausnahme der Zahlen, für die der Nenner $T_2(x) = 0$ wird.

$\sqrt{T(x)}$ hat als Definitionsbereich alle rationalen Zahlen, für die der Radikand $T(x) \geq 0$ ist.

Eine *Gleichung* bzw. *Ungleichung* mit dem Erfüllungsgrundbereich X ist laut Definition eine *Aussageform* der Gestalt

$$T_1(x) = T_2(x) \quad \text{bzw.} \quad T_1(x) < T_2(x) \ , \ x \in X \ .$$

Der *<u>Erfüllungsgrundbereich</u>* einer Gl/Ugl ist der Durchschnitt der Definitionsbereiche aller in der Gl/Ugl vorkommenden Terme.

Die *<u>Lösungsmenge</u>* (oder Erfüllungsmenge) einer Gl/Ugl ist diejenige Teilmenge des Erfüllungsgrundbereichs, deren Elemente die Gl/Ugl erfüllen, d.h. die bei Interpretation die Gl/Ugl in eine wahre Aussage überführen.

Beispiele: (Grundbereich der Variablen sei die Menge Q der rationalen Zahlen)

Aussageform (speziell Ungleichungen)	Lösungsmenge
$x > 1$ und $x < 2$	$L = \{ x \in Q \mid 1 < x < 2 \}$
$2 \leq x \leq 5$ und $3 \leq x \leq 6$	$L = \{ x \in Q \mid 3 \leq x \leq 5 \}$
$x < 1$ und $x > 2$	$L = \emptyset$ (leere Menge)
$2 \leq x \leq 5$ oder $3 \leq x \leq 6$	$L = \{ x \in Q \mid 2 \leq x \leq 6 \}$
$x < 3$ oder $x > -1$	$L = \{ x \in Q \mid -\infty < x < \infty \} = Q$

(Veranschauliche dir dies auf der Zahlengeraden!)

Zwei *Aussageformen heißen <u>äquivalent</u>* (geschrieben "äq") über demselben Erfüllungsgrundbereich genau dann, wenn ihre Lösungsmengen gleich sind.

4.2. Regeln für das äquivalente Umformen

Man ermittle zunächst stets den *Erfüllungsgrundbereich* der Gl/Ugl. Terme, die man auf beiden Seiten der Gl/Ugl addiert oder mit denen man beide Seiten multipliziert, sollen stets in diesem Erfüllungsgrundbereich erklärt sein.

Es gelten folgende *Regeln:*

(I) $T_1(x) \leq T_2(x)$ äq $T_1(x) \pm T_3(x) \leq T_2(x) \pm T_3(x)$
(Man darf auf beiden Seiten einer Gl/Ugl denselben Term addieren oder subtrahieren)

(IIa) $T_1(x) = T_2(x)$ äq $T_1(x) \cdot T_3(x) = T_2(x) \cdot T_3(x)$, wenn $T_3(x) \neq 0$

(IIb) $T_1(x) < T_2(x)$ äq $T_1(x) \cdot T_3(x) < T_2(x) \cdot T_3(x)$, wenn $T_3(x) > 0$

(IIc) $T_1(x) < T_2(x)$ äq $T_1(x) \cdot T_3(x) > T_2(x) \cdot T_3(x)$, wenn $T_3(x) < 0$

Multipliziert man beide Seiten einer Gl/Ugl mit einem Term $T_3(x)$, der für gewisse x gleich Null wird, dann muss man für diese Werte gesondert untersuchen, wie sich die Lösungsmenge beim Übergang von der Ausgangsgleichung zur umgeformten Gleichung ändert. In der Regel sind solche Werte für x gar nicht im Erfüllungsgrundbereich enthalten.
Bei Ungleichungen muss in der Regel eine Fallunterscheidung durchgeführt und sowohl Regel (IIb) als auch Regel (IIc) angewendet werden.

(III) Wenn $T_1(x)$ oder $T_2(x)$ identisch umgeformt wird und dabei der Erfüllungsgrundbereich der Gl/Ugl erhalten bleibt, dann ist die umgeformte Gl/Ugl der Ausgangsgl/ugl äquivalent.

(IV) $T_1(x) \leq T_2(x)$ äq $T_1^2(x) \leq T_2^2(x)$, wenn $T_1(x) \geq 0$ und $T_2(x) \geq 0$
(Diese Regel wird meist angewendet, wenn man Wurzeln aus einer Gl/Ugl beseitigen will.)

Beachte: Aus $T_1(x) < T_2(x)$ und $T_3(x) < T_4(x)$ folgt *nicht* $T_1(x) \cdot T_3(x) < T_2(x) \cdot T_4(x)$

Gegenbeispiel: $1 < 3$, $-2 < -1$, aber nicht $-2 < -3$

Wohl aber gelten folgende *Regeln für das* *<u>implizierende Umformen</u>* einer Gl/Ugl :

Aus $T_1(x) \leq T_2(x)$	Aus $0 \leq T_1(x) \leq T_2(x)$
und $T_3(x) \leq T_4(x)$	und $0 \leq T_3(x) \leq T_4(x)$
folgt $T_1(x) + T_3(x) \leq T_2(x) + T_4(x)$	folgt $0 \leq T_1(x) \cdot T_3(x) \leq T_2(x) \cdot T_4(x)$

Dass dies aber keine Regeln für äquivalentes Umformen sind, d.h. dass die Lösungsmenge der umgeformten Gl/Ugl mit der Lösungsmenge der Konjunktion der Ausgangsgl/ugl nicht übereinstimmen (sondern diese nur enthalten) muss, zeigt etwa folgendes Beispiel:

Aus $x = 2$ und $-x = -2$ | $L_1 = \{2\}$
folgt $0 \cdot x = 0$ | $L_2 = Q$ Es gilt $L_1 \subset L_2$.

4.3. Einige wichtige Gleichungen und Ungleichungen

Allaussagen, die aus allgemeingültigen Gleichungen durch Bindung der Variablen mit "Für alle ... gilt:" entstehen, nennt man *Formeln .*
(Wiederhole in diesem Zusammenhang Abschnitt 1.3.)

Satz: Für alle rationalen Zahlen gilt:

(1) $(a + b)(c + d) = ac + bc + ad + bd$;

(2) $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$;

(3) $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$;

(4) $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$.

Die Formeln (2), (3), (4) nennt man *binomische Formeln .*

Beweis:

Laut Distributivgesetz gilt stets $x(y + z) = xy + xz$.
Setzt man $x = a + b$, $y = c$, $z = d$, dann folgt hieraus
$(a + b)(c + d) = (a + b)c + (a + b)d = ac + bc + ad + bd$ und somit Formel (1) .

Setzt man $c = a$ und $d = b$ in (1) ein, dann erhält man $(a + b)(a + b) = a^2 + ab + ab + b^2$ und somit Formel (2).
Ersetzt man in (2) die Variable b durch $-b$, dann erhält man Formel (3).
Setzt man $c = a$ und $d = -b$, dann erhält man Formel (4).

Präge dir diese Formeln gut ein! Von rechts nach links gelesen liefern sie Regeln zum Umwandeln von Summen in Produkte (sogenannte *Faktorzerlegung von Termen*).
Versuche beim Faktorzerlegen stets zuerst auszuklammern und dann erst eine der binomischen Formeln anzuwenden.

Beispiele:

$n^6 - n^2 = n^2(n^4 - 1) = n^2(n^2 - 1)(n^2 + 1) = n^2(n + 1)(n - 1)(n^2 + 1)$

$12x^3 - 12x^2y + 3xy^2 = 3x(4x^2 - 4xy + y^2) = 3x(2x - y)^2$

$8ac - 2ad + 12bc - 3bd = 2a(4c - d) + 3b(4c - d) = (2a + 3b)(4c - d)$

$637u^5v^2 + 2002u^3v^3 + 1573uv^4 = 13uv^2(49u^4 + 154u^2v + 121v^2) = 13uv^2(7u^2 + 11v)^2$

Um die letzte Aufgabe zu lösen, muss man ggT(637;2002;1573) = 13 berechnen.
Dies erhält man etwa aus ggT(637;2002) = 91 und ggT(91;1573) = 13 mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus, vgl. Abschnitt 3.1. .

Mittelwerte aus positiven rationalen Zahlen a, b bzw. $a_1, a_2, \ldots, a_n$ werden wie folgt definiert:

<u>*arithmetisches* Mittel</u> $\dfrac{a+b}{2}$ bzw. $\dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$;

<u>*geometrisches* Mittel</u> $\sqrt{ab}$ bzw. $\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}$;

<u>*harmonisches* Mittel</u> $\dfrac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$ bzw. $\dfrac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}}$;

<u>*quadratisches* Mittel</u> $\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$ bzw. $\sqrt{\dfrac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{n}}$.

Satz: Für alle rationalen Zahlen a, b gelten die <u>*Dreiecksungleichungen*</u>:

$$||a| - |b|| \leq |a - b| \leq |a| + |b| ;$$

$$|a + b| \leq |a| + |b| .$$ (Gleichheit gilt genau für $a = b$.)

Satz: Für alle rationalen Zahlen x gilt:

Wenn $x > 0$, dann $x + \frac{1}{x} \geq 2$. (Gleichheit gilt genau für $x = 1$.)

Satz vom harmonischen, geometrischen, arithmetischen und quadratischen Mittel:

Für alle rationalen Zahlen a, b gilt:

Wenn $a > 0$ und $b > 0$, dann $\min(a;b) \leq \dfrac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab} \leq \dfrac{a+b}{2} \leq \sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}} \leq \max(a;b)$.

Gleichheit gilt genau für $a = b$. Für $a \neq b$ bedeutet $\min(a;b)$ die kleinere, $\max(a;b)$ die größere der beiden positiven Zahlen a, b.
Dieser Satz gilt analog für n positive rationale Zahlen.

Bei der Suche nach einem Beweis für solche Sätze geht man oft von der Behauptung aus und formt diese so lange um, bis man zu den Voraussetzungen oder zu einer allgemeingültigen Ungleichung gelangt. (Vgl. hierzu "Einige Regeln", Seite 14 .)

Beim Darstellen des Beweises muss man jedoch stets von den Voraussetzungen oder von einer allgemeingültigen Ungleichung ausgehen und zeigen, wie sich hieraus die Behauptung ableiten lässt.

Beispiel:

Lösungsfindung: $x + \frac{1}{x} \geq 2 \quad | \cdot x$ [wegen $x > 0$ ist Regel (IIb) anwendbar] .

$x^2 + 1 \geq 2x \quad | - 2x$ [Anwendung von Regel (I)]

$x^2 - 2x + 1 \geq 0$ [identische Umformung; Regel (III) anwenden]

$(x - 1)^2 \geq 0$

Dies ist eine allgemeingültige Ungleichung, da das Quadrat einer rationalen Zahl nie negativ sein kann.

Lösungsdarstellung:

Stets gilt $(x - 1)^2 \geq 0$; [das Quadrat einer rationalen Zahl ist nie negativ] .

Folglich gilt $x^2 - 2x + 1 \geq 0$; [Regel (III); identische Umformung der linken Seite] .

Folglich gilt $x^2 + 1 \geq 2x$; [Regel (I); Addition von $2x$ auf beiden Seiten] .

Für $x > 0$ gilt dann

$x + \frac{1}{x} \geq 2$; [Regel (IIb); Multiplikation beider Seiten mit dem positiven Term $\frac{1}{x}$] .

Damit ist bewiesen: Wenn $x > 0$, dann $x + \frac{1}{x} \geq 2$.

L i t e r a t u r h i n w e i s e

/1/ Mathematik in Übersichten, Berlin 1989

/2/ Varga, T.: Mathematische Logik für Anfänger, Aussagenlogik; Berlin 1972

/3/ Varga, T.: Mathematische Logik für Anfänger, Prädikatenlogik; Berlin 1973

/4/ Grosche, G.: Übungen für Junge Mathematiker, Teil II, Elementargeometrie, Leipzig 1969, MSB 37

/5/ Lehmann, E.: Übungen für Junge Mathematiker, Teil I, Zahlentheorie, Leipzig 1968, MSB 36

/6/ Kleinfeld, G.: Übungen für Junge Mathematiker, Teil III, Ungleichungen, Leipzig 1969, MSB 38

/6/ Borneleit, P. Übungen für Junge Mathematiker, Teil IV, Gleichungen, Leipzig 1976, MSB 87

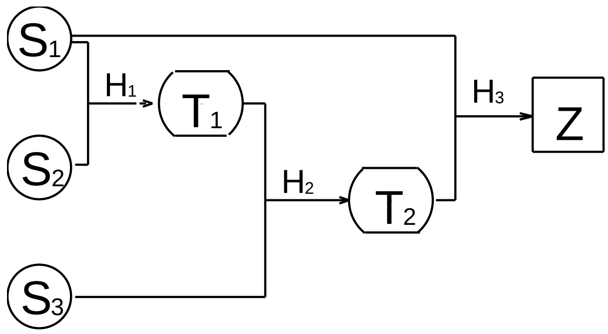
[MSB 37 bedeutet: Mathematische Schülerbücherei, Band 62. Die Titel /4/, /5/, /6/, /7/ sind zur Zeit nicht im Buchhandel sondern nur in Bibliotheken erhältlich.]

B e z i r k s k o m i t e e   C h e m n i t z
zur Förderung math.- nat. begabter und interessierter Schüler
www.bezirkskomitee.de

K o r r e s p o n d e n z z i r k e l   M a t h e m a t i k

Einige Regeln zum Lösen von problemhaften Aufgaben

Eine jede *Aufgabe* enthält Informationen über *"Start"* und *"Ziel"* .
Eine Aufgabe lösen heißt, auf irgendeine Weise irgendeinen Weg vom Start zum Ziel zu finden.
Dieser Weg führt in der Regel über gewisse *"Teilziele"* , die mit Hilfe gewisser *"Hilfsmittel"* erreicht werden.
In solchen Fällen lässt sich der Lösungsplan in Form eines *"Lösungsgraphen"* festhalten.
Die Belegung der Knoten und der Kanten eines solchen Graphen ist der nebenstehenden Skizze zu entnehmen.



Es ist zweckmäßig, zwischen *"Beweisaufgaben"* und zwei Arten von *"Bestimmungsaufgaben"* zu unterscheiden:

Aufgabe	*Start*	*Ziel*	*Teilziele*	*Hilfsmittel*
Beweis-aufgabe	Voraussetzungen	Behauptung	"Feststellungen"	Sätze, Definitionen, Umformungsregeln u.ä.
Bestim-mungs-aufgabe	Gegebenes	Gesuchtes		
	Daten (nebst Beziehungen)	Unbekannte	Hilfsgrößen	Formeln, Umformungsregeln, Sätze, Definitionen u.ä.
	(Konjunktion von) Aussageformen (Bedingungen)	Erfüllungsmenge	"Hilfsmengen"; vereinfachte Aussageformen	Umformungsregeln, Sätze, Definitionen, logische Schlussregeln u.ä.

Im außerunterrichtlichen Bereich werden bis Klassenstufe 10 vor allem folgende *Arten von Bestimmungs- und Beweisaufgaben* behandelt:

- *Geometrische* Aufgaben (einschließlich Konstruktions- und Ortsaufgaben als spezielle Bestimmungsaufgaben) ;
- *Zahlentheoretische* Aufgaben (über dem Bereich der natürlichen oder der ganzen Zahlen) ;
- *Arithmetische* Aufgaben (über dem Bereich der rationalen oder der reellen Zahlen) mit dem Teilgebiet *"Gleichungen/Ungleichungen" ;*
- Logisch-kombinatorische Aufgaben .

Ferner lohnt es, *Sach- und Anwendungsaufgaben* als eine spezielle Art von Bestimmungsaufgaben hervorzuheben.

Allgemeine Regeln zum Lösen problemhafter Aufgaben

(I) ***E r f a s s e n d e r A u f g a b e***

(1)
- Sind alle vorkommenden *Begriffe klar*?
- Ist eine günstige *Veranschaulichung* möglich? (*Figur, Skizze, Tabelle* o.ä.)
- *Start* und *Ziel* der Aufgabe ermitteln!
  (*Voraussetzungen - Behauptung ; Gegebenes - Gesuchtes*)
- *Günstige Bezeichnungen* einführen!
  Zweckmäßige Symbolik wählen, um so Start und Ziel übersichtlich festhalten zu können!
- Deutet der Aufgabentext darauf hin, dass ein *spezielles heuristisches Prinzip* nützlich sein könnte?
  (*Schubfachprinzip, Extremalprinzip, Symmetrieprinzip, Invarianzprinzip* u.ä.)

(II) ***F i n d e n e i n e s L ö s u n g s p l a n s***

- Wurde eine *ähnliche Aufgabe* bereits gelöst ?
  Welche Vorgehensweisen zum Lösen solcher Aufgaben sind bekannt?
- Erfolgversprechende *analoge Vorgehensweise* wählen!
- Zerlege die Aufgabe in überschaubare *Teilaufgaben* !
  - Ist eine *Fallunterscheidung* erforderlich?
- In welcher *Reihenfolge* sind diese Teilaufgaben zu lösen?

(2.1) *V o r w ä r t s a r b e i t e n (VA)*
- Welche *ableitbaren Teilziele* (*Feststellungen, Hilfsgrößen*) lassen sich von den Voraussetzungen bzw. den gegebenen Größen ausgehend unmittelbar erreichen (ableiten, berechnen)?

  Begründung!
  - Welche *Hilfsmittel* (*Sätze, Definitionen, Formeln* u.ä.) enthalten die Voraussetzungen bzw. die gegebenen Größen?
    (Diese Hilfsmittel können ableitbare Teilziele liefern!)

(2.2) *R ü c k w ä r t s a r b e i t e n (RA)*
- Von welchen *hinreichenden Teilzielen* aus ließe sich das Ziel unmittelbar erreichen?

  Begründung!
  - Welche *Hilfsmittel* (*Sätze, Formeln, Definitionen* u.ä.) enthalten die Behauptung bzw. die gesuchte Größe?
    (Diese Hilfsmittel können hinreichende Teilziele liefern!)

Man *arbeite von abgeleiteten Teilzielen aus vorwärts*, *von hinreichenden Teilzielen aus rückwärts*, bis ein Weg vom Start zum Ziel gefunden wurde.
Ein auf diese Weise gefundener *Lösungsplan* lässt sich stets in Form eines *Lösungsgraphen* festhalten.

(3) *G r u n d m e t h o d e* *zum Lösen von Bestimmungsaufgaben* *(Gl)*

- Führe günstige *Variable* ein und halte die gegebenen Beziehungen oder Bedingungen bzw. die gefundene Gesetzmäßigkeit in Form einer *Gleichung* fest.

- *Suche nach Beziehungen* (das sind allgemein Aussageformen, oft *Gleichungen*) *zwischen* den *gegebenen*, den *gesuchten* und u.U. noch günstig gewählten *Hilfsgrößen* ?
  - Die Anzahl der benötigten Gleichungen ist gleich der Summe der Anzahlen von gesuchten Größen und Hilfsgrößen.

- *Eliminiere die Hilfsgrößen!*

Um *von gegebenen oder gefundenen Aussageformen* (Bedingungen, Beziehungen, Gleichungen o.ä.) *zur gesuchten Erfüllungsmenge* zu gelangen, kann man folgende Wege einschlagen:

(3.1) *Durchschnittsbildung von Erfüllungsmengen:*

- *Ermittle zu jeder Bedingung* (Beziehung, Aussageform) *die* zugehörige *Erfüllungsmenge!*

  Bilde den *Durchschnitt dieser Erfüllungsmengen* !
  - Die Elemente endlicher Erfüllungsmengen kann man im Prinzip stets durch *"systematisches Erfassen aller möglichen Fälle"* ermitteln.
    Dabei ist es oft zweckmäßig, *Tabellen* zu verwenden.

- Ermittle die Erfüllungsmenge der *"informativsten" Bedingung*, (das ist die Bedingung mit der "kleinsten" Erfüllungsmenge, die das Suchfeld am stärksten einengt).

  Sondere aus dieser Menge alle diejenigen *Elemente aus*, die eine der anderen Bedingungen nicht erfüllen!

(3.1.1.) *Systematisches Probieren (Erfassen aller möglichen Fälle)*

- Ermittle eine *Reihenfolge* der Elemente des Erfüllungsgrundbereichs, die mit Sicherheit alle "möglichen" Elemente (Fälle) enthält!

- Entscheide für jedes Element (jeden Fall), ob es (er) die gegebene Bedingung (Beziehung, Gleichung, Ungleichung, allgemein Aussageform) erfüllt!

(3.2) *Folgern zum Zweck des Vereinfachens*

- *Forme die Bedingungen* (Beziehungen, Aussageformen o.ä.) günstig *um*, ziehe *zweckmäßige Folgerungen*!

  *E*rmittle nach einer solchen *Vereinfachung* die gesuchte Erfüllungsmenge.

  (Dies ist eine spezielle Form des *Vorwärtsarbeitens*.)
  - Welche der gegebenen Bedingungen ist (vermutlich) die *"informativste Bedingung"* (das ist die Bedingung mit der "kleinsten" Erfüllungsmenge)?
  - *Was lässt sich* aus dieser Bedingung *unmittelbar folgern*? *Begründung*!
  - Welches ist die *"nächst informative Bedingung"*?

◦ Was lässt sich aus ihr (und den bereits gezogenen Schlussfolgerungen) *folgern*?

(4) *Rückführungsprinzip*

- Kannst du eine Aufgabe nicht lösen, dann wende dich zunächst einer günstig gewählten *v e r w a n d t e n , l e i c h t e r e n A u f g a b e* zu!

(4.1) - Versuche die Aufgabe für einen *Spezialfall* zu lösen! Vielleicht helfen die so gefundenen Lösungsideen auch beim Lösen der Ausgangsaufgabe weiter.

- Auch die Beschäftigung mit *Verallgemeinerungen*, *Grenzfällen* und *analogen Fällen* kann diesem Zweck dienen.
- Gehe bei einer *parameterhaltigen Aufgabe* zu einer zugehörigen *Aufgabe mit* geschickt gewählten *konkreten Daten* über!
- *Variiere* den *Start* oder das *Ziel* !

(4.2) - Suche nach bereits *gelösten Aufgaben*, auf die sich die zu lösende Aufgabe *zurückführen* lässt!

- Formuliere *"Hilfsaufgaben"*, deren Lösung das Lösen der gestellten Aufgabe ermöglichen würden!

(5) *Transformationsprinzip*

- *Übersetze* (*t r a n s f o r m i e r e*) die Aufgabe *in die Sprache einer günstig gewählten mathematischen Disziplin*!
  - ◦ Verwende dabei die Strategien (2.1) *Vorwärtsarbeiten*, (2.2) *Rückwärtsarbeiten* und 3) *"Suche nach Gleichungen"* !
- *Löse die* (gleichbedeutende) *transformierte Aufgabe* mit den Hilfsmitteln dieser Disziplin!
- *Deute* das Ergebnis (Rückübersetzung in den Ausgangsbereich)!

[Bei "nichtmathematisch" formulierten Sach- und Anwendungsaufgaben muss man so vorgehen; bei "innermathematischen" Aufgaben ist es manchmal günstig, so vorzugehen.]

(6) *Kenntniserweiterung*

- Kannst du eine Aufgabe trotz aller Anstrengungen nicht lösen, dann muss du zunächst deine *K e n n t n i s s e e r w e i t e r n .*
  Besorge dir aus einschlägiger *Literatur* neue Anregungen und neue Hilfsmittel.

(III) ***A u s f ü h r e n d e s P l a n s ; D a r s t e l l e n d e r L ö s u n g***

(Dies ist eine erlernbare Technik, bei der heuristische Vorgehensweisen keine Rolle spielen.)

(IV) ***K o n t r o l l e u n d A u s w e r t u n g***

- *Kontrolliere* das Resultat, den Beweis!

Wurde jeder Lösungsschritt hinreichend begründet?

(Manchmal ist eine *Probe am Spezialfall* sehr nützlich.)

- Überlege, *welche heuristische Vorgehensweise* dir beim Lösen der Aufgabe besonders *geholfen hat*! Merke es dir!

  Bei welchen anderen Aufgaben würdest du *analog* vorgehen?
- Wurden alle gegebenen Größen oder Bedingungen bzw. alle Voraussetzungen für die Lösung verwendet?
  - Ist dies nicht der Fall, dann ist entweder die Lösung fehlerhaft oder die Aufgabe lässt sich verallgemeinern.
- Formuliere eine *neue, verwandte Aufgabe* (eine *analoge* oder eine *verallgemeinerte* Aufgabe; eine wahre *Umkehrung* des bewiesenen Satzes; o.ä.) !

Folgendes Schema hält fest, in welchen Reihenfolgen diese durchnummerierten "Impulsblöcke" durchlaufen werden können, wobei in der Regel "Schleifen" auftauchen.
Der Prozess der Lösungsfindung wird durch eine "STOP" beendet, wenn ein Lösungsplan gefunden wurde. Da es sich hierbei um einen heuristischen Prozess handelt, wird dieses Ziel keineswegs mit Sicherheit erreicht.

Aus diesem *"allgemeinen Regelsystem"* kann man durch Interpretation und Konkretisierung der vorkommenden Begriffe sowie durch spezifische Ergänzungen *"spezielle Regelsysteme"* für das Lösen der genannten Aufgabenarten gewinnen.
Durch Verwenden der eingeführten Nummern für die einzelnen Impulsblöcke soll dieser wichtige Zusammenhang festgehalten werden. So kann man erkennen, dass man beim Lösen der inhaltlich sehr verschiedenen speziellen Aufgabenarten im Prinzip stets immer wieder nur einige wenige heuristische Vorgehensweisen einsetzt.

Regeln zum Lösen von geometrischen Beweisaufgaben

(1) Zeichne eine *Figur* ! (Keinen Spezialfall wählen!)
Wie lautet die *Behauptung*, wie lauten die *Voraussetzungen* des Satzes?
Schreibe sie unter Verwendung der in der Figur eingeführten, geschickt gewählten *Bezeichnungen* heraus!

(2.1) Gehe von den *Voraussetzungen* aus!
Welche Festhellungen lassen sich aus ihnen unmittelbar *folgern*?
Welche Sätze oder Definitionen enthalten diese Voraussetzungen?
Sie können als *Beweismittel* dienen!

- Ergänze gegebenenfalls die Figur! Welche ableitbaren Feststellungen führen wohl am einfachsten zum Ziel?

(2.2) Betrachte die *Behauptung*!
Aus welchen Feststellungen ließe sie sich unmittelbar *folgern*?
Welche Sätze oder Definitionen enthalten eine gleichartige Behauptung?
Sie können als *Beweismittel* dienen!

- Hast du ein solches Beweismittel gefunden, dann *ergänze* gegebenenfalls *die Figur* durch zugehörige *Hilfslinien* oder Bezeichnungen.
Welche der gefundenen hinreichenden Feststellungen führt wohl am einfachsten zum Ziel?
- Manchmal ist es günstig, die *Behauptung äquivalent umzuformen*, um so brauchbare Beweismittel oder Hilfslinien zu finden.

Wende *abwechselnd* die Methode des *Vorwärtsarbeitens und Rückwärtsarbeitens* an, bis du einen Weg von den Voraussetzungen zur Behauptung gefunden hast!

- Welche *neuen Beweismittel* oder *Hilfslinien* legt die dabei laufend ergänzte Figur nahe?
- Bieten sich an einer Stelle *mehrere Beweismittel* an, dann versuche, deren *Erfolgschancen abzuschätzen*!
Verfolge stets zunächst den Weg, der am einfachsten zu sein scheint!

Wenn du nicht weiterkommst, dann *prüfe* zunächst genau nach, ob du vielleicht eine der *Voraussetzungen nicht verwendet* hast!
Hast du dich durch eine zu spezielle Beweisfigur zu einem Trugschluss verleiten lassen?
Verfolge an einer *neuen Beweisfigur* deine Beweisidee!

(4.1) Versuche, wenigstens einen *Spezialfall* des Satzes zu beweisen!
Betrachte auch *Grenzfälle*, *Verallgemeinerungen* oder *analoge Fälle*!
Das kann zu einer Beweisidee führen!

(4.2) Versuche, zunächst noch unbekannte *Hilfssätze* zu entdecken und zu formulieren, mit deren Hilfe sich der Satz beweisen ließe, und beschäftige dich zunächst mit deren Beweis.
- Überzeuge dich zunächst, dass es sich um *"nützliche"* Hilfssätze handelt, mit deren Hilfe sich der gegebene Satz tatsächlich beweisen lässt.
Wenn dies der Fall ist, dann versuche, diese Hilfssätze zu beweisen.

(5) *Übersetze* die elementargeometrische Beweisaufgabe in die *Sprache der Vektoralgebra* oder der *Koordinatengeometrie* !
Auch Hilfsmittel aus der *Trigonometrie* und der *Theorie der komplexen Zahlen* sind manchmal von Nutzen.

Regeln zum Lösen von geometrischen Bestimmungsaufgaben

(1) Zeichne eine *Figur* !
Wie lautet die *Unbekannte* ? Wie lauten die *Daten* und die gegebenen *Bedingungen* ?
Führe günstige *Bezeichnungen* ein!

(2.1) Gehe von den *Daten nebst Bedingungen* aus!
Welche Hilfsgrößen lassen sich aus ihnen unmittelbar *berechnen* (bestimmen)?
Welche *Hilfsmittel* (Formeln o.ä.) bieten sich hierzu an?

(2.2) Betrachte die *Unbekannte* !
Aus welchen Hilfsgrößen ließe sie sich unmittelbar *berechnen*?
Als *Hilfsmittel* bieten sich *Formeln oder Beziehungen* an, in denen die Unbekannte vorkommt!

Wende *abwechselnd* die Strategie des *Vorwärts- und Rückwärtsarbeitens* an, bis du einen Weg von den Daten zur Unbekannten gefunden hast!

Wenn du nicht weiterkommst, dann *prüfe* nach, ob du bereits alle *gegebenen Bedingungen* voll *ausgenützt* hast!

(3) *Suche nach Beziehungen* (meist in Form von *Gleichungen*) *zwischen den Daten, der Unbekannten und günstig gewählten Hilfsgrößen* !

(3.2) Löse das entstandene Gleichungssystem!
Eliminiere dabei die eingeführten *Hilfsgrößen*!

- Du brauchst hierzu ein System unabhängiger Gleichungen, deren Anzahl gleich der Summe der Anzahlen der Unbekannten und der Hilfsgrößen ist.

Beachte, dass auch die Anwendung von (2.1) und (2.2) stets auf ein solches Gleichungssystem führt, das jedoch in der Regel sehr leicht lösbar ist, weil sich die eingeführten Hilfsgrößen durch schrittweises Einsetzen eliminieren lassen.
Das Lösen von Gleichungssystemen, die durch Anwenden von (3) gefunden wurden, ist dagegen häufig eine problemhafte Aufgabe.

Kommst du auf diese Weise noch nicht ans Ziel, dann wende analog die Regeln (4.1), (4.2) oder (5) an.

Die genannten Regeln gelten auch für **Beweis- und Bestimmungsaufgaben** aus der **Stereometrie**.
Zusätzlich beachte hier noch folgendes:

(1) Der *Veranschaulichung* der Aufgabenstellung können nicht nur eine Figur in *perspektivischer Darstellung*, eine *Zweitafelprojektion*, ein *Körpernetz* oder eine *Abwicklung* dienen, sondern oft sind auch günstig gewählte *ebene Schnitte*, denen die charakteristischen Eigenschaften des räumlichen Gebildes zu entnehmen sind, ein nützliches Hilfsmittel.

(2.1), (2.2) Neben Begriffen und Sätzen aus der Stereometrie bieten sich dann auch *Sätze aus der Planimetrie als Hilfsmittel* an.

(4) Suche nach einer *analogen Aufgabe aus der Planimetrie* ! Oft lässt sich eine hier erfolgreiche Lösungsidee analog beim Lösen der stereometrischen Aufgabe anwenden.

Regeln zum Lösen von geometrischen Ortsaufgaben

[*Hinweis:* Geometrische Ortsaufgaben sind spezielle Bestimmungsaufgaben. Gesucht ist jeweils eine Punktmenge M , deren Elemente einer gegebenen Bedingung genügen, die sich in Form einer Aussageform $H(X)$ schreiben lässt. Dabei bezeichnet X einen beliebigen Punkt der Ebene (manchmal auch des Raumes) .
Es ist dann zu zeigen: Für alle X gilt: $x \in M \Leftrightarrow H(X)$.]

(I) Versuche, den *gesuchten geometrischen Ort* zu *erraten* !

a) Zeichne eine *genaue Figur* !

b) Betrachte *Spezialfälle* und *Grenzfälle* für die Lage des Punktes X !

c) Hast du eine Vermutung gefunden, dann überprüfe sie anhand von weiteren Spezialfällen!

(II) Versuche, die gefundene *Vermutung* zu *beweisen* !

Verwende hierzu die Regeln zum Lösen von geometrischen Beweisaufgaben!

a) Beachte, dass die Zusammenfassung eines Satzes und einer Umkehrung dieses Satzes zu beweisen ist!
Hierzu sind in der Regel zwei Beweise nötig.

b) Beachte, dass man anstelle des Satzes "Wenn $x \in M$, dann $H(X)$"
auch die mit ihm gleichbedeutende *Kontraposition*
"Wenn nicht $H(X)$, dann nicht $x \in M$" beweisen kann.

c) Beachte, dass eine Umkehrung eines Satzes oft *indirekt* bewiesen wird!
Dabei kann man manchmal der Beweisidee für den Ausgangssatz folgen oder man kann den Ausgangssatz als Beweismittel verwenden.

(5) Kommst du auf diese Weise nicht ans Ziel, dann übersetze die Aufgabe in die Sprache der *Koordinatengeometrie* !
(Du erhältst dann den geometrischen Ort zunächst in der Form $F(x;y) = 0$.)

(I) , (II) ist eine Konkretisierung von *Impulsblock (4)*; es wird einerseits der Übergang zur zugehörigen Beweisaufgabe empfohlen, andererseits wird bei der Suche nach einer Vermutung das Betrachten von Spezialfällen und Grenzfällen angeraten.

Regeln zum Lösen von geometrischen Konstruktionsaufgaben

[*Hinweis:* Geometrische Konstruktionsaufgaben sind spezielle Bestimmungsaufgaben. Zu ermitteln sind alle Figuren, die die gegebenen Bedingungen erfüllen. Genauer gesagt: Zu ermitteln ist eine (Konstruktionsbeschreibung genannte) algorithmische Vorschrift, die es gestattet, aus den Daten genau diejenigen (untereinander nicht kongruenten) Figuren zu konstruieren, die die gestellten Bedingungen erfüllen.
Solche Aufgaben lassen sich stets so umformulieren, dass nur Punkte nebst Bedingungen gegeben und nur Punkte gesucht sind, und man daher die Methode der geometrischen Örter und die Methode der Hilfselemente anwenden kann. Der Suche nach Hilfsgrößen entspricht hier die Suche nach Hilfspunkten.
Man kann solche Aufgaben auch so umformulieren, dass nur Streckenlängen nebst Bedingungen gegeben und nur Streckenlängen gesucht sind, und man daher die algebraische Methode anwenden kann. Die hierbei erhaltenen Terme sind (elementar) konstruierbar genau dann, wenn sie als Operationszeichen nur +, - , · , : und Quadratwurzelzeichen enthalten.]

(1) Zeichne eine *Planfigur* !
Notiere die gegebenen *Bedingungen*, in denen die *Daten* vorkommen!

(3.1) Wende die **Methode der geometrischen Örter** an !

- Reduziere die Aufgabe auf die Konstruktion eines (oder mehrerer) Punktes X! (Das ist oft auf mehrere Weisen möglich.)
- Bilde aus den gegebenen Bedingungen zwei Aussageformen!
- *Ermittle die* den Aussageformen *zugehörigen beiden* Erfüllungsmengen (*geometrischen Örter*) !
- Bilde den *Durchschnitt* dieser beiden geometrischen Örter !

Kommst du so nicht sofort ans Ziel, dann wende die **Methode der Hilfselemente** an !

(2.1) *Welche Hilfspunkte* (Hilfsfiguren o.ä.) *lassen sich aus den gegebenen Bedingungen* unmittelbar *konstruieren?*
Begründe (d.h. nenne die beiden geometrischen Örter, die den Hilfspunkt bestimmen) !

(2.2) *Aus welchen Hilfspunkten* (Hilfsfiguren o.ä.) *ließe sich der gesuchte Punkt unmittelbar konstruieren* ?
Sind für jeden dieser Hilfspunkte je zwei geometrische Örter bekannt?

Wende abwechselnd die Strategie des Vorwärts- und des Rückwärtsarbeitens an, bis du einen Weg von den gegebenen Punkten über die gefundenen Hilfspunkte zu den gesuchten Punkten gefunden hast !

Als *Hilfsfiguren* eignen sich oft *Teildreiecke* (Teilfiguren), zur gesuchten Figur *ähnliche Figuren* oder Figuren, über die man viel aussagen kann (z.B. Parallelogramme).

Um brauchbare Hilfselemente zu finden, muss man oft *einschlägige geometrische Sätze verwenden*, d.h. charakteristische Eigenschaften der zu konstruierenden Figur beachten.
Auch die *Anwendung von Abbildungen* (von Bewegungen, Ähnlichkeitsabbildungen, Spiegelungen am Kreis usw.) kann hierbei helfen.

(3) Bei schwierigeren Konstruktionsaufgaben muss man die für die Konstruktion der Hilfspunkte oder der gesuchten Punkte benötigten *Beziehungen* erst *entdecken und herleiten*, was zu einer

(4.2) *Beweisaufgabe als Hilfsaufgabe* führen kann. Es kann auch vorkommen, dass du zu einer gegebenen oder gefundenen Bedingung den zugehörigen geometrischen Ort nicht kennst. Dann muss du dich der zugehörigen *Ortsaufgabe als Hilfsaufgabe* zuwenden. Überzeuge dich aber vorher, dass du auf diese Weise wirklich zu einem Lösungsweg für die Konstruktionsaufgabe gelangst!

(5) Wende die **algebraische Methode** an !

- Suche eine Streckenlänge, die eine *"hinreichende" Hilfsgröße* ist, d.h. mit deren Hilfe sich die gesuchte Figur konstruieren ließe.

- *Drücke* diese *Hilfsgröße rechnerisch durch die Daten aus* !

Erweist sich der so gefundene Term als konstruierbar, dann hast du einen Lösungsweg gefunden.

Regeln zum Lösen von zahlentheoretischen Beweisaufgaben

(1) Schreibe die *Behauptung* und die *Voraussetzungen* des Satzes unter Verwendung einer geschickten Bezeichnungsweise heraus!
(*Variable* einführen, Aussageformen verwenden.)
Mache dir den Inhalt des Satzes klar, indem du einige *konkrete Zahlenbeispiele* betrachtest!

(5) Lohnt es, die Aufgabe in die Sprache der *Kongruenzen* zu übersetzen?

(2.1) *Vorwärtsarbeiten* !
Wandle Teilbarkeitsaussagen durch Anwendung der Definition von $a|b$ in *Gleichungen* um!
Führt eine *vollständige Fallunterscheidung* zum Ziel?
Ist ein *Beweis durch vollständige Induktion* erfolgversprechend?

(2.2) *Rückwärtsarbeiten* !
(Definitionen sowie Sätze mit gleicher Behauptung liefern *hinreichende Feststellungen*.)

(4.2) Beim Rückwärts- oder Vorwärtsarbeiten stößt man bisweilen auf *Hilfsaufgaben* bzw. entdeckt *Hilfssätze*, mit deren Hilfe man ans Ziel gelangen kann.

(4) Manchmal lohnt es, die Beweisaufgabe *in eine Bestimmungsaufgabe umzuwandeln* und die zugehörigen Regeln zu verwenden.

Regeln zum Lösen von zahlentheoretischen Bestimmungsaufgaben

[*Hinweis:* Zahlentheoretische Bestimmungsaufgaben lassen sich in der Regel auf folgende Form bringen:
"Ermittle die Menge aller (natürlichen oder ganzen) Zahlen, die folgende Bedingungen (Aussageformen) erfüllen: .... " .
Im Gegensatz etwa zu geometrischen Bestimmungsaufgaben oder zu Sach- und Anwendungsaufgaben ist hier der Aufgabenstellung nicht zu entnehmen, dass es genau eine Lösung gibt, sondern die gesuchte Erfüllungsmenge kann leer sein, endlich oder unendlich viele Elemente enthalten.]

(1) Führe *Variable* ein und schreibe die *gegebenen Bedingungen* unter Verwendung günstiger Bezeichnungen als Aussageformen heraus!

(3.1) Ermittle zu jeder Bedingung die Erfüllungsmenge!
Bilde den *Durchschnitt dieser Erfüllungsmengen* !

(3.1.1) Jede endliche Erfüllungsmenge lässt sich im Prinzip durch *"systematisches Erfassen aller möglichen Fälle"* ermitteln.
Lege hierzu übersichtliche *Tabellen* an!

- Oft ist die *Reihenfolge wichtig*, in der man die einzelnen Bedingungen untersucht.
- Beginne mit der Bedingung, die von möglichst wenigen Elementen erfüllt wird!
  Aus dieser Menge kann man dann systematisch alle *Elemente ausschließen, die* eine der restlichen *Bedingungen nicht erfüllen.*
  Hierbei beginne man mit der Bedingung, die sich am leichtesten nachprüfen lässt.

(3.2) *Forme* die gegebenen Bedingungen zweckmäßig *um, ziehe Folgerungen* aus ihnen, und *ermittle nach* solchen *Vereinfachungen die* gesuchte *Erfüllungsmenge* !
[Oft wird (3.1) und (3.2) kombiniert angewendet. In beiden Fällen liegt eine spezielle Form des Vorwärtsarbeitens vor.]

(4) Versuche, durch Betrachten einiger *konkreter Fälle*, durch Probieren o.ä. zu einer *Vermutung* über die gesuchte Erfüllungsmenge zu gelangen, und *löse die zugehörige Beweisaufgabe* !

(4.1) Suche nach *bereits gelösten Aufgaben*, auf die sich die gestellte Aufgabe *zurückführen* lässt!
Formuliere *Hilfsaufgaben*, deren Lösung das Lösen der gestellten Aufgabe ermöglichen würde!

(4.2) Wende dich zunächst einer *<u>einfacheren verwandten Aufgabe</u>* zu!
Beschäftige dich zunächst mit einem *<u>Spezialfall</u>* !

(5) Lohnt es, das *<u>Rechnen mit Kongruenzen</u>* als Hilfsmittel einzusetzen?

Regeln zum Lösen von logisch-kombinatorischen Aufgaben

[*Hinweis:* Wir betrachten hier nur folgende logisch-kombinatorischen Aufgaben:
Gegeben sind Aussagen über Zuordnungen zwischen oder über Reihenfolgen von Elementen nebst Informationen über die Wahrheitswerte dieser Aussagen.
Zu ermitteln sind alle Zuordnungen oder Reihenfolgen, die sämtliche gegebenen Bedingungen erfüllen.]

(1) Führe geeignete Bezeichnungen ein, wähle eine *<u>zweckmäßige Symbolik</u>*, und *<u>halte</u> die gegebenen <u>Aussagen</u>* (Bedingungen) *in übersichtlicher Form <u>fest</u>* !
Verwende *<u>Tabellen</u>*, um Zuordnungen oder Reihenfolgen übersichtlich festzuhalten.

(2.1) *<u>Was lässt sich aus den gegebenen Aussagen folgern</u>? Begründung!*

(3.2) Welche Aussage dürfte *die meiste Information* liefern?
Beginne mit dieser Aussage!
- Halte die gefolgerten Aussagen in der angefertigten Tabelle symbolisch fest; ziehe weitere Schlussfolgerungen, und fülle die Tabelle schrittweise aus !
- Sind die Wahrheitswerte der gegebenen Aussagen noch zu ermitteln, dann suche zunächst nach in sich widerspruchsvollen oder nach untereinander unverträglichen Aussagen!
- Wenn du nicht weiterkommst, dann prüfe nach, ob du schon alle gegebenen Informationen voll ausgeschöpft hast!

(2.2) *Betrachte das <u>Gesuchte</u>! <u>Woraus</u> und auf welche Weise <u>ließe es sich ableiten</u> (ermitteln)? Begründung!*
- Oft ist die Kenntnis der *Wahrheitswerte* der gegebenen Aussagen hinreichend für die Lösung der Aufgabe.
  Wie lassen sich diese Wahrheitswerte ermitteln?

(3.1.1) *<u>Erfasse systematisch alle möglichen Fälle</u>* (Zuordnungen, Reihenfolgen, Wahrheitswertverteilungen) und *<u>schließe</u> systematisch* alle *<u>Fälle aus</u>*, die nicht eintreten können!
- Welche Fälle lassen sich auf Grund welcher Aussage sofort ausschließen? Überprüfe die restlichen Fälle anhand der gegebenen Aussagen!
- Verwende *Tabellen*, um die gewonnenen Ergebnisse übersichtlich festzuhalten!

Regeln zum Lösen von Beweisaufgaben aus dem Gebiet "Gleichungen/Ungleichungen"

(1) Die abzuleitende Gl/Ugl ist die *Behauptung* des zu beweisenden Satzes.

Wie lauten seine *Voraussetzungen*?

- Gilt die Gl/Ugl für alle oder nur für einen Teilbereich der reellen Zahlen oder werden noch weitere einschränkende Voraussetzungen getroffen?
- Mache dir den Inhalt des Satzes anhand einiger *konkreter Zahlenbeispiele* klar!

Wähle auch Zahlen, die die Voraussetzung nicht erfüllen!

(2.2.1) *Folgern aus der Behauptung: Forme die abzuleitende Gl/Ugl* so lange *um*, bis du zu einer allgemeingültigen Gl/Ugl gelangst oder zu einer Gl/Ugl, die sich aus den Voraussetzungen ableiten lässt.

- Untersuche, ob sich der so gefundene Weg auch von den Voraussetzungen zur Behauptung beschreiten lässt oder ob dabei noch bestimmte Modifikationen nötig sind!

(2.2) *Betrachte die abzuleitende Ungleichung!*

- Weist ihre Gestalt auf eine bekannte *"Standardungleichung"* (z.B. die Ugl über das arithmetische, das geometrische, das harmonische und das quadratische Mittel) hin, die als *Hilfsmittel* einsetzbar wäre?

  Forme zweckmäßig um, so dass dies möglich wird!
- Lassen sich die vorkommenden *Terme* günstig (nach oben oder nach unten) *abschätzen* , so dass man auf diese Weise zu einer leichter ableitbaren Ugl gelangen kann?

(2.1) *Betrachte die Voraussetzungen! Was lässt sich aus ihnen folgern?*

- Deuten sie auf die Anwendbarkeit gewisser *Standardungleichungen* hin?
- Lässt sich eine der Variablen durch die anderen ausdrücken, so dass sich in der abzuleitenden Gl/Ugl die *Anzahl der Variablen verringern* lässt?

(4.1) Gelingt dir die Ableitung der Gl/Ugl nicht, dann beschäftige dich zunächst mit einem *Spezialfall* . Vielleicht führt das zu einer brauchbaren Lösungsidee.

(4.2) Bei der Anwendung von (2.2.1) oder (2.2) stößt man bisweilen auf *Hilfsaufgaben.*

Beschäftige dich erst dann mit solchen Aufgaben, wenn du dich überzeugt hast, dass ihre Lösung die Lösung der Ausgangsaufgabe ermöglicht.

(5) Manchmal ist es zweckmäßig, die *graphische Lösungsmethode* einzusetzen.

Untersuche die zu vorkommenden Termen gehörenden *Funktionen und deren Graphen* vor allem in Hinblick auf Extremwerte; dies kann beim Abschätzen von Termen helfen.

Regeln zum Lösen von Bestimmungsaufgaben aus dem Gebiet "Gleichungen/Ungleichungen"

(2.1) *Betrachte die gegebenen Gl/Ugl* ; analysiere die vorkommenden Terme!

(3.2)
- Ermittle den *Lösungsgrundbereich* der Gl/Ugl (als Durchschnitt der Definitionsbereiche aller vorkommenden Terme)!
- Versuche durch *Untersuchung der Wertebereiche der* vorkommenden *Terme* und durch andere *inhaltliche Überlegungen* Informationen über die gesuchte Lösungsmenge zu gewinnen!
- Untersuche bei quadratischen Gl/Ugl stets zunächst die *Diskriminante*! Welche Information liefert sie über die gesuchte Lösungsmenge?
- *Ganzzahlige Lösungen* von Gleichungen n-ten Grades lassen sich mit Hilfe des Wurzelsatzes von Vieta *erraten.* Durch Abspalten des zu einer erratenen Lösung gehörenden Linearfaktors lässt sich der *Grad der Gleichung erniedrigen.*

(5) *Transformiere* die Aufgabe in den Bereich "Funktionen und ihre Graphen", d.h. versuche *auf graphischem Wege Informationen über die Lösungsmenge* zu *gewinnen!*

- Forme die Gl/Ugl so um, dass auf beiden Seiten Terme stehen, deren zugehörige Graphen du relativ einfach zeichnen kannst. Kennzeichne charakteristische Punkte und Asymptoten dieser Graphen!
- Lässt sich auf diesem Wege die Lösungsmenge genau ermitteln , oder gewinnt man so nur Informationen über die Anzahl und die näherungsweise Lage der Lösungen?

(2.1) Wenn du auf diese Weise die Lösungsmenge nicht genau ermitteln kannst, dann *forme die Gl/Ugl* so lange (wenn möglich *äquivalent*) *um*, bis du zu einer Gl/Ugl gelangst, deren Lösungsmenge sich unmittelbar ablesen lässt. Versuche auch, *durch* geschickte *Substitutionen die Gl/Ugl* zu *vereinfachen* !

- Versuche die Gl/Ugl so umzuformen, dass *auf der einen Seite ein Produkt, auf der anderen Seite Null* steht ! Denn dann kannst du (mit Hilfe eines bekannten Satzes über Produkte) *zu einer Alternative von einfacheren Gl/Ugl übergehen.* Neben dem Ausklammern gemeinsamer Faktoren verwende vor allem die binomischen Formeln, um Summen in Faktoren zu zerlegen.
- Entsteht beim Umformen eine *Alternative bzw. eine Konjunktion* von Gl/Ugln, dann erhält man die gesuchte Lösungsmenge als *Vereinigung bzw. Durchschnitt* der betreffenden Lösungsmengen.

Wenn du nicht immer nur äquivalent umgeformt hast, dann ist ein *Existenznachweis* in Form einer *Probe* nötig, d.h. du musst noch nachprüfen, ob alle Lösungen der umgeformten Gleichung auch wirklich Lösungen der Ausgangsgleichung sind. (Bei Ungleichungen ist dieses Vorgehen unpraktikabel.)

Regeln zum Ermitteln des Ansatzes bei Sach- und Anwendungsaufgaben

[*Hinweis:* Das Lösen von Sach- und Anwendungsaufgaben (aus Physik, Technik, Ökonomie usw.) erfolgt im Prinzip stets in 3 Schritten:
1. Übersetzung der Aufgabe in die Sprache einer mathematischen Disziplin; (Ansatz finden);
2. Lösen der mathematischen Aufgabe (meist Gleichung oder Gleichungssystem);
3. "Rückübersetzung", d.h. Deutung des mathematischen Resultats; Formulieren des Antwortsatzes.
Wir betrachten hier nur den 1.Schritt, der einer Anwendung der Regel (5) entspricht. Der 2.Schritt entspricht im allgemeinen der Anwendung von Regel (3.2) .]

(1) Was ist <u>*gegeben*</u> , was ist <u>*gesucht*</u> ? Führe <u>*Variable*</u> ein!

- Welche <u>*allgemeinen Beziehungen*</u> (Formeln, Gesetze) spielen beim Lösen der Aufgabe eine Rolle?

  Welche <u>*speziellen Beziehungen*</u> sind dem Aufgabentext unmittelbar zu entnehmen?
- Fertige zur Veranschaulichung eine <u>*Skizze*</u> an!
- Fertige eine <u>*Tabelle*</u> an!

  Die in der einschlägigen allgemeinen Beziehung vorkommenden Größen liefern die Spalteneingänge; passend gewählte Zeileneingänge müssen dem jeweiligen speziellen Sachverhalt entnommen werden.

  Trage die gegebenen Größen in die Tabelle ein! Kennzeichne die Felder, in denen die gesuchten Größen stehen!

(2.1) <u>*Was lässt sich aus dem Gegebenen unmittelbar berechnen*</u>*? Begründung!*
Mit welchen <u>*Hilfsmitteln*</u> (Formeln, Sätzen o.ä.) ist dies möglich?

(2.2) <u>*Aus welchen Größen ließe sich das Gesuchte unmittelbar berechnen*</u>*?*
Verwende hierzu Formeln, in denen das Gesuchte vorkommt!

Versuche, durch *Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten* einen Weg vom Gegebenen über Hilfsgrößen zum Gesuchten zu finden und so eine Gleichung zu gewinnen, in der neben der gesuchten Größe nur gegebene Größen vorkommen.

(3) <u>*Suche nach Gleichungen*</u> (Beziehungen) <u>*zwischen*</u> den <u>*gegebenen*</u>*,* den <u>*gesuchten*</u> und passend gewählten <u>*Hilfsgrößen*</u> !
Eliminiere die Hilfsgrößen!

- Welche Beziehungen kannst du der *Skizze* entnehmen?
- Fülle die Felder der *Tabelle* schrittweise aus, indem du die gegebenen oder gefundene Beziehungen verwendest! Dabei kannst du auch von einer Hilfsgröße ausgehen.
- Sind alle Felder der Tabelle gefüllt und wird nur eine Größe gesucht, dann gibt es in der Regel noch eine Beziehung, die beim Ausfüllen der Tabelle nicht verwendet wurde. Diese Beziehung liefert die <u>*Ansatzgleichung*</u>.

B e z i r k s k o m i t e e   C h e m n i t z
zur Förderung math.- nat. begabter und interessierter Schüler
www.bezirkskomitee.de

K o r r e s p o n d e n z z i r k e l   M a t h e m a t i k

E i n i g e   g r u n d l e g e n d e   p l a n i m e t r i s c h e   S ä t z e

(Mit "Z" wird die Zusammenfassung eines Satzes "S" und einer wahren Umkehrung "U" dieses Satzes bezeichnet.)

I. B E W E G U N G E N

(1) *Verschiebungen* $V(\overrightarrow{PP'})$, *Drehungen* $Dr(M;\varphi)$, *Geradenspiegelungen* Sp(g) und *Punktspiegelungen* Sp(P) sowie alle aus diesen Abbildungen durch Nacheinanderausführung entstehenden Abbildungen sind Bewegungen.

(2) Einige *Eigenschaften* von Bewegungen:

a) *Eindeutige Verknüpfbarkeit:* Die Nacheinanderausführung zweier Bewegungen ergibt stets wieder eine Bewegung.

b) *Umkehrbarkeit:* Zu jeder Bewegung gibt es eine eindeutig bestimmte entegegengesetzte Bewegung (die mit der Ausgangsbewegung verknüpft die identische Abbildung ergibt).

c) *Geradentreue, Strahlentreue, Streckentreue:* Das Bild einer Geraden (eines Strahls, einer Strecke) ist stets wieder eine Gerade (ein Strahl, eine Strecke).

d) *Inzidenztreue:* Wenn $A \in a$, dann gilt auch für die Bilder $A' \in a'$.

e) *Anordnungstreue:* Wenn B zwischen A und C , dann B' zwischen A' und C' .

f) *Parallelentreue:* Wenn $g \| h$ und $g,h \xrightarrow{\text{Bew}} g',h'$, dann $g' \| h'$.

g) *Mittelpunktstreue:* Das Bild des Mittelpunkts einer Strecke ist stets auch der Mittelpunkt der Bildstrecke.

h) *Winkeltreue:* Wenn $\alpha \xrightarrow{\text{Bew}} \beta$, dann $\alpha = \beta$.

i) *Längentreue:* Wenn $\overline{AB} \xrightarrow{\text{Bew}} \overline{A'B'}$, dann $\overline{AB} = \overline{A'B'}$.

k) *Inhaltstreue:* Wenn $F \xrightarrow{\text{Bew}} F'$, dann $A_F = A_{F'}$.

Ia. V e r s c h i e b u n g e n $V(\overrightarrow{PP'})$

(3) Eine (von der identischen Abbildung verschiedene) orientierungserhaltende Bewegung ist genau dann eine *Verschiebung*, wenn sie *keinen Fixpunkt* besitzt.

(4)a) Wenn $g \xrightarrow{V(PP')} h$, dann $g \| h$.

b) Wenn $g \| h$, dann gibt es eine Verschiebung $V(\overrightarrow{PP'})$, so dass $g \xrightarrow{V(PP')} h$.

Ib. D r e h u n g e n Dr(M;φ)

(5) Eine (von der identischen Abbildung verschiedene) Bewegung ist genau dann eine *Drehung*, wenn sie *genau einen Fixpunkt* (das Drehzentrum) besitzt.

(6) Wenn $g \xrightarrow{Dr(M;\varphi)} h$, dann $\sphericalangle(g,h) = \varphi$

Ic. G e r a d e n s p i e g e l u n g e n Sp(g)

(7) Eine Bewegung ist genau dann eine *Geradenspiegelung*, wenn sie *genau eine Fixpunktgerade* (die Spiegelgerade) besitzt.

(8) $g \xrightarrow{Sp(g)} h$ genau dann, wenn $g \perp h$.

(9) $P \xrightarrow{Sp(g)} P$ genau dann, wenn $P \in g$.

(10) Wenn $F \xrightarrow{Sp(g)} F'$, dann $F' \xrightarrow{Sp(g)} F$; [Sp(g) ist eine *involutorische* Abbildung] .

Id. Punktspiegelungen Sp(P)

(11) Sp(P) = Dr(P;180°) .

(12) $g \xrightarrow{Sp(P)} g$ genau dann, wenn $P \in g$.

(13) Wenn $g \xrightarrow{Sp(P)} h$, dann $g \| h$.

(14) Wenn $F \xrightarrow{Sp(P)} F'$,dann $F' \xrightarrow{Sp(P)} F$; [Sp(P) ist eine *involutorische* Abbildung] .

Ie. V e r k n ü p f u n g v o n B e w e g u n g e n

(15) $V(\overrightarrow{AB}) \circ V(\overrightarrow{BC}) = V(\overrightarrow{AC})$.

(16) $Dr(M_1;\varphi_1) \circ Dr(M_2;\varphi_2) = Dr(M;\varphi_1+\varphi_2)$, falls $\varphi_1+\varphi_2 \neq 0°,360°$.

(17) $Sp(g) \circ Sp(h) = Dr(S;2\sphericalangle(g,h))$, falls $g \cap h = \{S\}$.

(18) $Sp(g) \circ Sp(h) = V(\overrightarrow{PP'})$, falls $g \| h$, wobei $\overline{PP'} = 2d(g,h)$.

(19) $Sp(A) \circ Sp(B) = V(2\overrightarrow{AB})$.

II. W I N K E L

S1a) *Nebenwinkel* ergänzen sich zu 180° .

S1b) *Scheitelwinkel* sind einander gleich .

S2a) *Stufenwinkel* an geschnittenen Parallelen sind einander gleich .

S2b) *Wechselwinkel* an geschnittenen Parallelen sind einander gleich .

S2c) *Entgegengesetzt liegende Winkel* an geschnittenen Parallelen ergänzen sich zu 180°.

U2a) Wenn Stufenwinkel einander gleich sind, dann sind die geschnittenen Geraden parallel.

Bilde entsprechend U2b) und U2c) !

S3) Winkel mit paarweise parallelen oder orthogonalen Schenkeln sind gleich, wenn entweder beide spitz oder beide stumpf sind.

III. S Y M M E T R I E

S1) Zu zwei verschiedenen Punkten gibt es genau eine *Symmetrieachse* (die gleichzeitig die *Mittelsenkrechte* der zugehörigen Strecke ist).

Z2a) P liegt genau dann auf der Mittelsenkrechten von $\overline{AB}$, wenn $\overline{AP} = \overline{PB}$ gilt; (dabei sei $A \neq B$) .

S2b) Die Symmetrieachse zu zwei Punkten halbiert die Verbindungsstrecke dieser Punkte und steht auf ihr senkrecht.

S2c) Verbindet man einen Punkt der Symmetrieachse mit zwei symmetrisch gelegenen Punkten, dann schließen die Verbindungsstrecken mit der Achse einander gleiche Winkel ein.

Bilde wahre Umkehrungen von S2b) und S2c) !

IV: D R E I E C K E

IVa. G l e i c h s c h e n k l i g e u n d g l e i c h s e i t i g e D r e i e c k e

S1a) Jedes *gleichschenklige* Dreieck besitzt eine *Symmetrieachse* .

U1a) Wenn ein Dreieck eine *Symmetrieachse* besitzt, dann ist es *gleichschenklig* .

S1b) Besitzt ein Dreieck genau eine Symmetrieachse, dann geht diese durch die Spitze des (gleichschenkligen) Dreiecks, halbiert den Winkel an der Spitze, halbiert die Basis und steht auf ihr senkrecht.

S1c) *Basiswinkelsatz:* In jedem gleichschenkligen Dreieck sind die Basiswinkel einander gleich.

U1c) Wenn in einem Dreieck zwei Winkel einander gleich sind, dann ist dieses Dreieck gleichschenklig.

Z2a) Wenn ein Dreieck gleichseitig ist, dann besitzt es genau drei Symmetrieachsen, und umgekehrt.

Z2b) Jedes gleichseitige Dreieck ist gleichwinklig, und umgekehrt.

IVb. W i n k e l u n d S e i t e n i m D r e i e c k

S3) In jedem Dreieck beträgt die *Summe der Innenwinkel* 180° .

S4a) In jedem Dreieck beträgt die *Summe der Außenwinkel* 360° .

S4b) Jeder *Außenwinkel* eines Dreiecks ist gleich der Summe der beiden nicht anliegenden Innenwinkel dieses Dreiecks.

S4c) Jeder Außenwinkel eines Dreiecks ist größer als jeder der beiden nicht anliegenden Innenwinkel dieses Dreiecks.

S5a) In jedem Dreieck ist die Summe zweier Seiten stets größer als die dritte Seite und jede Seite stets größer als die Differenz der beiden anderen Seiten (*Dreiecksungleichung*) .

Z5b) In jedem Dreieck liegen gleiche Seiten gleichen Winkeln gegenüber und umgekehrt.

Z5c) In jedem Dreieck liegt der größeren von zwei Seiten der größere Winkel gegenüber, dem größeren von zwei Winkeln die größere Seite gegenüber.

S6) Die Strecke, die die Mittelpunkte zweier Seiten eines Dreiecks verbindet (d.h. die *Mittellinie*) verläuft parallel zur dritten Seite dieses Dreiecks und ist gleich deren Hälfte.

IVc. Kongruenz von Dreiecken

Z7) *Kongruenzsatz:* Zwei Dreiecke sind kongruent genau dann, wenn in diesen Dreiecken alle entsprechenden Seiten (Strecken) gleich lang und alle entsprechenden Winkel gleich groß sind.

S8a) *Kongruenzsatz* ***sss :*** Dreiecke sind kongruent, wenn sie in den drei Seiten übereinstimmen.

S8b) *Kongruenzsatz* ***sws :*** Dreiecke sind kongruent, wenn sie in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel übereinstimmen .

S8c) *Kongruenzsatz* ***wsw :*** Dreiecke sind kongruent, wenn sie in einer Seite und den beiden dieser Seite anliegenden Winkeln übereinstimmen .

S8d) *Kongruenzsatz* ***SsW :*** Dreiecke sind kongruent, wenn sie in zwei Seiten und dem der größeren Seite gegenüberliegenden Winkel übereinstimmen.

IVd. Transversalen und ausgezeichnete Punkte im Dreieck

S9a) Die drei *Mittelsenkrechten* eines Dreiecks schneiden einander in einem Punkt, dem *Umkreismittelpunkt* dieses Dreiecks.

S9b) Die drei *Winkelhalbierenden* eines Dreiecks schneiden einander in einem Punkt, dem *Inkreismittelpunkt* dieses Dreiecks.

S9c) Die drei *Seitenhalbierenden* eines Dreiecks schneiden einander in einem Punkt, dem *Schwerpunkt* dieses Dreiecks.
Dieser teilt jede Seitenhalbierende vom Eckpunkt aus im Verhältnis $2:1$.

S9d) Die drei *Höhen* eines Dreiecks schneiden einander in einem Punkt.

S9e) Die Halbierende eines Innenwinkels und die Halbierenden der beiden ihm nicht anliegenden Außenwinkel eines Dreiecks schneiden einander in einem Punkt (einem *Ankreismittelpunkt*) .

S10) Die Halbierende eines Innenwinkels (Außenwinkels) eines Dreiecks teilt die Gegenseite innen (außen) im Verhältnis der anliegenden Seiten.

S10a) Die Halbierende eines Innenwinkels eines Dreiecks schneidet den Umkreis dieses Dreiecks im Mittelpunkt des Kreisbogens, der zur Gegenseite des betreffenden Winkels gehört.

S11) Es gilt stets: $a : b = h_b : h_a$.

S12) In jedem gleichschenkligen Dreieck fallen die vier zur Basis gehörenden Transversalen zusammen.

S13) Der Schwerpunkt S , der Höhenschnittpunkt H und der Umkreismittelpunkt M liegen auf einer Geraden, die *Eulersche Gerade* genannt wird. S teilt die Strecke $\overline{HM}$ im Verhältnis $2:1$.

S14) Die drei Seitenmittelpunkte, die drei Höhenfußpunkte und die drei Mittelpunkte der oberen Höhenabschnitte liegen auf einem Kreis, der *Feuerbachscher Kreis* genannt wird.
Der Mittelpunkt des Feuerbachschen Kreises liegt auf der Eulerschen Geraden und halbiert die Eulersche Strecke $\overline{HM}$.

IVe. Rechtwinklige Dreiecke (Satzgruppe des Pythagoras)

Seien a , b , c die Längen der Seiten $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ eines Dreiecks; seien p , q die Längen der Projektionen von $\overline{BC}$ bzw. $\overline{CA}$ auf $\overline{AB}$; sei h die Länge der Höhe auf $\overline{AB}$.
Dann gilt für alle Dreiecke:

Z15a) Ein Dreieck ist rechtwinklig genau dann, wenn $a^2 + b^2 = c^2$ gilt.
(*Satz des Pythagoras* und Umkehrung)

Z15b) Ein Dreieck ist rechtwinklig genau dann, wenn $a^2 = pc$ und $b^2 = qc$ gilt.
(*Kathetensatz* und Umkehrung)

S15c) Wenn ein Dreieck rechtwinklig ist, dann gilt $h^2 = pq$. (*Höhensatz*)

V. VIERECKE

S1) In jedem Viereck beträgt die *Summe der Innenwinkel* 360° .

S2a) In jedem *Trapez* ergänzen sich die einem Schenkel anliegenden Winkel zu 180° .

S2b) Wenn ABCD ein Trapez mit den Grundseiten $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ ist und m die *Mittelparallele* dieses Trapezes ist, dann halbiert m die Schenkel $\overline{AD}$ und $\overline{BC}$ des Trapezes.

U2b) Wenn ABCD ein Trapez mit den Grundseiten $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ ist und m die Schenkel $\overline{AD}$ und $\overline{BC}$ des Trapezes halbiert, dann ist m die *Mittelparallele* des Trapezes.

S2c) Die *Mittellinie* eines Trapezes ist halb so lang wie beide Grundlinien zusammen.

Z2d) Ein *Trapez* ist gleichschenklig genau dann, wenn die einer Grundseite anliegenden Winkel gleich groß sind.

Z3) Ein Viereck ist ein *Parallelogramm* genau dann, wenn:
- a) die gegenüberliegenden Seiten paarweise gleich lang sind ;
- b) die gegenüberliegenden Winkel paarweise gleich groß sind ;
- c) die Diagonalen einander halbieren ;
- d) alle nebeneinanderliegenden Winkel sich zu 180° ergänzen :
- e) das Viereck zentralsymmetrisch ist (mit dem Diagonalenschnittpunkt als Symmetriezentrum) .

S4a) In jedem *Rechteck* sind die Diagonalen gleich lang.

Z4b) Ein Parallelogramm ist genau dann ein *Rechteck*, wenn seine Diagonalen gleich lang sind.

S5a) In jedem *Rhombus* stehen die Diagonalen aufeinander senkrecht.

Z5b) Ein Parallelogramm ist genau dann ein Rhombus, wenn seine Diagonalen aufeinander senkrecht stehen.

Z6) Ein Parallelogramm ist genau dann ein *Quadrat* , wenn seine Diagonalen gleich lang sind und aufeinander senkrecht stehen.

S7a) In jedem *Drachenviereck* stehen die Diagonalen aufeinander senkrecht, und eine der Diagonalen halbiert die andere.

S7b) Jedes *Drachenviereck* besitzt genau eine Symmetrieachse.

VI. K R E I S

S1) Drei verschiedene, nicht auf einer Geraden liegende Punkte bestimmen genau einen Kreis k(M;r) .

S2) Jeder Kreis ist *zentralsymmetrisch* in bezug auf seinen Mittelpunkt und *axialsymmetrisch* in bezug auf jeden seiner Durchmesser.

VIa. K r e i s u n d G e r a d e b z w. S t r e c k e

Z3a) Zwei *Sehnen* eines Kreises sind genau dann gleich lang, wenn die Abstände der Sehnen vom Mittelpunkt des Kreises gleich sind.

Z3b) Die größere von zwei Sehnen eines Kreises hat den kleineren Abstand vom Mittelpunkt und umgekehrt.

S3c) Zu gleichen *Zentriwinkeln* eines Kreises gehören gleiche Bogen und Sehnen.
(Bestimme wahre Umkehrungen dieses Satzes!)

S4) Das vom Mittelpunkt eines Kreises auf eine Sehne dieses Kreises gefällte Lot halbiert diese Sehne.

$U_1 4$) Die Gerade, die durch den Mittelpunkt einer Sehne eines Kreises geht und auf dieser Sehne senkrecht steht (d.h. die Mittelsenkrechte dieser Sehne) geht durch den Mittelpunkt des Kreises.
$U_2 4$) Die Gerade, die durch den Mittelpunkt eines Kreises und durch den Mittelpunkt einer (von einem Durchmesser verschiedenen) Sehne dieses Kreises geht, steht auf dieser Sehne senkrecht.

S5a) Der *Berührungsradius* einer Tangente eines Kreises steht auf dieser Tangente senkrecht.

U5a) Die auf dem Radius $\overline{MP}$ eines Kreises in P errichtete Senkrechte ist Tangente dieses Kreises.

S5b) Das vom Kreismittelpunkt auf eine Tangente gefällte Lot geht durch den Berührungspunkt.

U5b) Die auf einer Tangente im Berührungspunkt errichtete Senkrechte geht durch diesen Berührungspunkt.

S6) Schneiden sich zwei Tangenten eines Kreises, so sind die Tangentenabschnitte einander gleich, die Zentrale des Schnittpunkts halbiert den Winkel zwischen den Tangenten und steht auf der Berührungssehne senkrecht.

S7a) *Sehnensatz:* Schneiden zwei Sehnen eines Kreises einander, dann ist das Produkt der Abschnitte der einen Sehne gleich dem Produkt der Abschnitte der anderen Sehne.

S7b) *Sekantensatz:*
Schneiden zwei Sekanten eines Kreises einander außerhalb dieses Kreises, dann ist das Produkt der (vom Schnittpunkt aus gemessenen) Sekantenabschnitte auf beiden Sekanten gleich.

S7c) *Sekantentangentensatz:*
Schneiden eine Sekante und eine Tangente eines Kreises einander, dann ist das Quadrat des Tangentenabschnitts gleich dem Produkt der Sekantenabschnitte.

VIb. K r e i s u n d W i n k e l

S8a) *Peripheriezentriwinkelwinkelsatz:*
Jeder Peripheriewinkel ist halb so groß wie der Zentriwinkel, der mit ihm über demselben Kreisbogen steht.

U8a) Jeder über einem Kreisbogen stehende Winkel, der halb so groß ist wie der zugehörige Zentriwinkel, ist ein Peripheriewinkel (d.h. sein Scheitel liegt auf dem zugehörigen Kreis).

S8b) *Peripheriewinkelsatz:*
Alle Peripheriewinkel, die über demselben Bogen stehen, sind gleich.

S9) *Satz des Thales:*
Wenn ein Peripheriewinkel eines Kreises über einem Durchmesser dieses Kreises steht, dann ist er ein rechter Winkel.

$U_1$9) Wenn ein rechter Winkel über einem Durchmesser eines Kreises steht, dann ist er ein Peripheriewinkel dieses Kreises (d.h. sein Scheitel liegt auf dem Kreis).

$U_2$9) Wenn ein Peripheriewinkel eines Kreises ein rechter Winkel ist, dann steht er über einem Durchmesser dieses Kreises (d.h. seine Schenkel gehen durch die Endpunkte eines Durchmessers dieses Kreises).

S10) *Sehnentangentenwinkelsatz:*
Jeder Sehnentangentenwinkel eines Kreises ist gleich groß wie jeder zugehörige Peripheriewinkel dieses Kreises.

VIc. K r e i s u n d V i e r e c k (Es werden nur konvexe Vierecke betrachtet.)

Z11) Ein Viereck ist ein *Sehnenviereck* genau dann, wenn die Summe zweier gegenüberliegender Winkel dieses Vierecks stets 180° beträgt.

S12) *Satz des Ptolomäus:*
In jedem Sehnenviereck ist das Produkt der Diagonalen gleich der Summe der Produkte der gegenüberliegenden Seiten.

Z13) Ein Viereck ist *Tangentenviereck* genau dann, wenn in diesem Viereck die Summe zweier gegenüberliegender Seiten stets gleich der Summe der beiden anderen gegenüberliegenden Seiten ist.

VId. Z w e i K r e i s e

S14) Jede gemeinsame Sehne zweier Kreise wird von der gemeinsamen Zentralen halbiert und steht auf ihr senkrecht.

S15) Der Berührungspunkt zweier Kreise liegt stets auf der gemeinsamen Zentralen dieser Kreise.

U15) Zwei Kreise, die einen Punkt der gemeinsamen Zentralen gemeinsam haben, berühren einander.

S16) Die gemeinsamen Tangenten zweier einander schneidender Kreise sind axialsymmetrisch bezüglich der gemeinsamen Zentralen.

VII. ÄHNLICHKEITSABBILDUNGEN - ÄHNLICHKEIT - STRAHLENSÄTZE

S1) *Streckungen* werden durch ihr Streckungszentrum Z und ihren Streckungsfaktor k ($\neq 0$) eindeutig festgelegt.

S2) Die *Nacheinanderausführung* zweier Streckungen ergibt stets entweder eine Streckung oder eine Verschiebung.

Z3) Eine umkehrbar eindeutige Abbildung einer Ebene auf sich ist eine *Ähnlichkeitsabbildung* genau dann, wenn sie entweder eine Bewegung oder eine Streckung oder die Nacheinanderausführung einer Bewegung und einer Streckung ist.

S4) Ähnlichkeitsabbildungen haben dieselben *Eigenschaften* wie Bewegungen (vgl. I.), mit Ausnahme der Längen- und der Inhaltstreue.
An deren Stelle gilt:

a) Wenn $\overline{AB} \xrightarrow{Ä(Z;k)} \overline{A'B'}$, dann $\overline{A'B'} = k \cdot \overline{AB}$.

b) Wenn $F \xrightarrow{Ä(Z:k)} F'$, dann $A_{F'} = k^2 \cdot A_F$.

Z5) *Hauptähnlichkeitssatz:*
Dreiecke sind ähnlich genau dann, wenn sie in allen Winkeln übereinstimmen und wenn die Verhältnisse aus entsprechenden Seiten (Strecken) stets gleich sind.

S6) *Ähnlichkeitssätze:* Dreiecke sind ähnlich, wenn sie übereinstimmen

a) in zwei Winkeln;
b) in drei Seitenverhältnissen;
c) im Verhältnis zweier Seiten und dem von diesen Seiten eingeschlossenen Winkel;
d) im Verhältnis zweier Seiten und dem der größeren dieser Seiten gegenüberliegenden Winkel.

S7) Im rechtwinkligen Dreieck sind die durch die Höhe auf die Hypotenuse gebildeten Teildreiecke untereinander und dem Ausgangsdreieck ähnlich.

S8) *Strahlensätze:*

Werden Strahlen (Geraden) eines Büschels von Parallelen geschnitten, dann verhalten sich

a) die Abschnitte auf einem Strahl (einer Geraden) wie die entsprechenden Abschnitte auf einem anderen Strahl (einer anderen Geraden) dieses Büschels.

b) die zwischen denselben Strahlen (Geraden) liegenden Parallelenabschnitte wie die vom Scheitelpunkt aus gemessenen entsprechenden Abschnitte auf einem Strahl (einer Geraden) dieses Büschels.

c) die zwischen zwei Strahlen (Geraden) des Büschels gelegenen Abschnitte auf zwei Parallelen wie die auf zwei anderen Strahlen (Geraden) gelegenen Abschnitte auf denselben Parallelen.

S9) Die *Inhalte* ähnlicher Figuren verhalten sich wie die Quadrate der Längen entsprechender Strecken.

B e z i r k s k o m i t e e   C h e m n i t z
zur Förderung math.-nat. begabter und interessierter Schüler
www.bezirkskomitee.de

K o r r e s p o n d e n z z i r k e l   M a t h e m a t i k

B e w e i s m i t t e l   z u m   B e w e i s   p l a n i m e t r i s c h e r   S ä t z e

U m s t r u k t u r i e r t e r   W i s s e n s s p e i c h e r

Diese Zusammenstellung enthält - in umstrukturierter Form - einen wesentlichen Teil des Grundwissens, über das man verfügen muss, um auch schwierigere planimetrische Beweisaufgaben lösen zu können. Sie ist auf die Methode des *Rückwärtsarbeitens* zugeschnitten. Es werden jeweils mehrere hinreichende Bedingungen genannt, aus denen sich eine bestimmte Feststellung (Behauptung, Aussage) folgern lässt.

Formuliere zu den hier nur stichwortartig festgehaltenen Angaben jeweils die zugehörigen Sätze!
Mache dir deren Inhalt im Bedarfsfall anhand einer Figur klar!
Wenn du bei einem Beweis auf ein hier nicht angegebenes Beweismittel stößt, dann ergänze diese Zusammenstellung!
Präge dir diese Beweismittel gut ein! Eigne dir durch häufiges Lösen von Beweisaufgaben die Fähigkeit an, im konkreten Fall zu entscheiden, welches der möglichen Beweismittel die größte Erfolgschance hat!

1. B e z i e h u n g e n   z w i s c h e n   W i n k e l n

$\boxed{\alpha = \beta}$

1) Entsprechende Winkel in kongruenten oder ähnlichen Dreiecken ;
2) Stufen- oder Wechselwinkel an Parallelen ;
3) Basiswinkel in gleichschenkligen Dreiecken oder Trapezen ;
4) spitze (stumpfe) Winkel mit paarweise orthogonalen oder parallelen Schenkeln;
5) Peripheriewinkel über gleichem Bogen ;
6) Peripherie- und Sehnentangentenwinkel über gleichem Bogen ;
7) Gegenwinkel im Parallelogramm ;
8) Winkel an Winkelhalbierenden (z.B. an der Zentralen eines Tangentenpaars) ;
9) $\alpha \xrightarrow{\text{Bew}} \beta$;
10) Es gibt ein γ, so dass $\alpha = \gamma$ und $\beta = \gamma$.

$\boxed{\alpha > \beta}$

1) $a > b$ im zugehörigen Dreieck ;
2) Außenwinkel und nichtanliegender Innenwinkel ;
3) Zentriwinkel oder Peripheriewinkel, die zu ungleichen Bögen gehören .

$\boxed{\alpha = 2\beta}$

1) Zentri- und Peripheriewinkel über gleichem Bogen ;
2) Zentri- und Sehnentangentenwinkel über gleichem Bogen ;
3) Außenwinkel an der Spitze und Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck.

$\boxed{\alpha + \beta = 180°}$

1) Gegenwinkel im Sehnenviereck ;
2) entgegengesetzt liegende Winkel an Parallelen;
3) Nachbarwinkel im Parallelogramm ;
4) Schenkelwinkel im Trapez .

$\boxed{\alpha = \beta + \gamma}$	1) Außenwinkel und nichtanliegende Innenwinkel ;
$\boxed{\measuredangle(g,h) = \alpha = 90°}$	1) $\alpha + \beta = 90°$ (Innenwinkelsatz) ;
	2) Winkel im Rechteck, im Quadrat ;
	3) Winkel zwischen Diagonalen eines Rhombus, eines Quadrats ;
	4) Winkel zwischen Tangente und Berührungsradius ;
	5) Winkel zwischen Zentrale und Berührungssehne ;
	6) Peripheriewinkel über einem Durchmesser ;
	7) vierter Teil eines Vollwinkels ;
	8) Winkelhalbierende von Nebenwinkeln ;
	9) es gilt $a^2 + b^2 = c^2$ im Dreieck ;
	10) Höhe in A zerlegt das Dreieck in ähnliche Dreiecke ;
	11) $g \xrightarrow{Sp(h)} g$; $g \xrightarrow{Dr(M;90°)} h$.

2. Beziehungen zwischen Strecken

$\boxed{a = b}$	1) Entsprechende Seiten (Strecken) in kongruenten Dreiecken ;
	2) $\alpha = \beta$ im zugehörigen Dreieck ;
	3) Radien eines Kreises ;
	4) Tangentenabschnitte ;
	5) Gegenseiten im Parallelogramm (Rechteck) ;
	6) Diagonalen im Rechteck ;
	7) Diagonalenabschnitte im Parallelogramm ;
	8) zu den Schenkeln eines gleichschenkligen Dreiecks gehörende Ecktransversale ;
	9) Sehnen mit gleichem Abstand vom Mittelpunkt ;
	10) $a \xrightarrow{Bew} b$;
	11) Es gibt ein c , so dass $a = c$ und $b = c$.
$\boxed{a > b}$	1) $\alpha > \beta$ im zugehörigen Dreieck ;
	2) Sehnen mit ungleichem Abstand vom Mittelpunkt .
$\boxed{c = a + b}$	1) Gesamtstrecke als Summe von Teilstrecken (Streckenabtragung) .
$\boxed{a + b > c}$	1) Seiten im Dreieck .
$\boxed{a = 2b}$	1) Basis und Mittellinie im Dreieck ;
	2) Abschnitte einer Seitenhalbierenden ;
	3) entsprechende Seiten (Strecken) in ähnlichen Dreiecken mit $k = 1:2$;
	4) Diagonale und Diagonalenabschnitt im Parallelogramm ;
$\boxed{ab = cd}$	1) Gleichheit von (Rechtecks-) Inhalten ;
$\boxed{a:c = d:b \ / \ a:d = c:b}$	2) Ähnlichkeit, Strahlensätze ;
	3) Sehnenabschnitte, Sekantenabschnitte ;
	4) $a : b = h_b : h_a$.

3. Beziehungen zwischen Geraden

$\boxed{g \| h \ / \ AB \| CD}$

1) g, h besitzen eine gemeinsame Orthogonale ;

2) gleiche Stufen- oder Wechselwinkel ;

3) die Summe entgegengesetzt liegender Winkel beträgt 180° ;

4) Parallelogrammseiten ; Grundseiten eines Trapezes ;

5) Mittellinie und Grundseite im Dreieck oder im Trapez ;

6) $g \xrightarrow{V(PP')} h$.

$\boxed{g \perp h}$ vgl. 1., $\sphericalangle(g,h) = 90°$.

4. Beziehungen zwischen Dreiecken

$\boxed{\triangle ABC \cong A'B'C'}$

1) Kongruenzsätze sss , sws , wsw , SsW ;

2) $\triangle ABC \xrightarrow{Bew} \triangle A'B'C'$.

$\boxed{\triangle ABC \sim A'B'C'}$

1) $\sphericalangle A = \sphericalangle A'$ und $\sphericalangle B = \sphericalangle B'$;

2) $\overline{AB} : \overline{BC}\ BC : \overline{AC}\ AC = \overline{A'B'}\ A'B' : \overline{B'C'}\ B'C' : \overline{A'C'}\ A'C'$;

3) $\sphericalangle A = \sphericalangle A'$ und $\overline{AB} : AC = A'B' : A'C'$;

4) $\triangle ABC \xrightarrow{Ä(Z;k)} \triangle A'B'C'$.

5. Beziehungen zwischen Punkten , Geraden , Strecken u.ä.

$\boxed{P \in AB \ / \ P \in g}$

1) $\sphericalangle APB = 180°$;

2) $\overline{AB}$ ist eine Diagonale im Parallelogramm, P ist der Mittelpunkt der anderen Diagonalen ;

3) $\overline{AB}$ ist eine spezielle Dreieckstransversale, P ist der Schnittpunkt der beiden zugehörigen Transversalen ;

4) $P \xrightarrow{SP(AB)} P$; $g \xrightarrow{Sp(P)} g$.

$\boxed{P \in k(M,r)}$

1) Scheitel eines rechten Winkels über einem Durchmesser von $k(M;r)$;

2) Endpunkt eines Radius ;

3) Umkehrung des Peripheriewinkelsatzes oder des Peripheriezentriwinkelsatzes .

M ist der *Mittelpunkt* von $\overline{AB}$ *:* $A \xrightarrow{Sp(M)} B$;

g ist die *Mittelsenkrechte* von $\overline{AB}$ *:* $A \xrightarrow{Sp(g)} B$;

w ist die *Winkelhalbierende* von $\sphericalangle(g,h)$ *:* $g \xrightarrow{Sp(w)} h$.

6. Eigenschaften von Figuren

Gleichseitiges Dreieck::
1) Drei gleiche Seiten ;
2) zwei gleiche Winkel , ein 60°-Winkel ;
3) zwei 60°-Winkel ;
4) die Seitenhalbierenden, Höhen, Winkelhalbierenden und Mittelsenkrechten fallen zusammen ;
5) drei Symmetrieachsen ;
6) $B \xrightarrow{Dr(A;60°)} C$.

Quadrat:
1) Vier gleiche Seiten, ein rechter Winkel ;
2) drei gleiche Seiten, zwei rechte Winkel ;
3) zwei gleiche Nachbarseiten, drei rechte Winkel ;
4) gleich lange, orthogonale, einander halbierende Diagonalen ;
5) vier gleiche Seiten, gleich lange Diagonalen ;
6) drei gleiche Seiten, gleich lange und orthogonale Diagonalen ;
7) vier Symmetrieachsen, Diagonalenschnittpunkt ist Symmetriezentrum ;
8) $B \xrightarrow{Dr(A;90°)} D$ und $C \xrightarrow{Dr(B;90°)} A$.

Rechteck:
1) Drei rechte Winkel ;
2) zwei Paare paralleler Gegenseiten, ein rechter Winkel ;
3) zwei Paare gleicher Gegenseiten, ein rechter Winkel ;
4) ein Paar gleicher und paralleler Gegenseiten, ein rechter Winkel ;
5) gleich lange, einander halbierende Diagonalen ;
6) zwei Symmetrieachsen (Mittellinien), Diagonalenschnittpunkt ist Symmetriezentrum .

Rhombus:
1) Vier gleiche Seiten ;
2) orthogonale, einander halbierende Diagonalen ;
3) zwei Symmetrieachsen (Diagonalen), Diagonalenschnittpunkt ist Symmetriezentrum .

Parallelogramm:
1) Zwei Paare paralleler Gegenseiten ;
2) zwei Paare gleicher Gegenseiten ;
3) ein Paar gleicher und paralleler Gegenseiten ;
4) zwei Paare gleicher Gegenwinkel ;
5) einander halbierende Diagonalen ;
6) Diagonalenschnittpunkt ist Symmetriezentrum ;
7) $\overline{AB} \xrightarrow{VPP')} \overline{CD}$.

Drachenviereck:
1) Zwei Paare gleicher Nachbarseiten ;
2) ein Paar gleicher Gegenwinkel ;
3) orthogonale Diagonalen, von denen eine die andere halbiert .

Sehnenviereck:
1) $A,B,C,D \in k(M;r)$;
2) $\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180°$;
3) $ef = ac + bd$ (Satz des Ptolomäus) .

Tangentenviereck:
1) $a + c = b + d$.

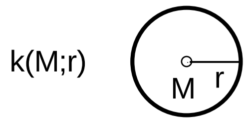
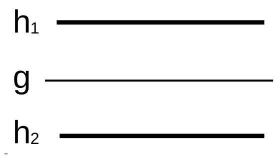
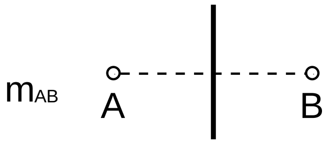
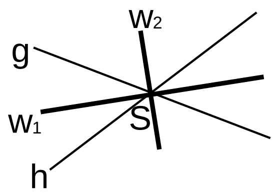
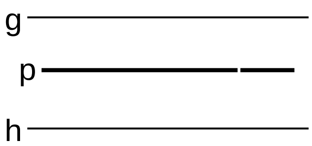
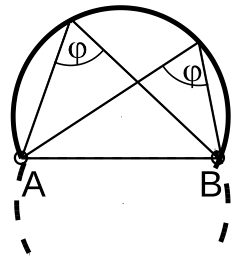
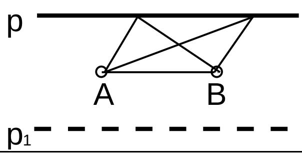
B e z i r k s k o m i t e e   C h e m n i t z

zur Förderung math.- nat. begabter und interessierter Schüler

www.bezirkskomitee.de

K o r r e s p o n d e n z z i r k e l   M a t h e m a t i k

E i n i g e   g e o m e t r i s c h e   Ö r t e r

Der g.O. aller Punkte, die von einem festen Punkt M den festen Abstand r haben, ist der **Kreis** um M mit dem Radius r .	$\overline{XM} = r$	
Der g.O. aller Punkte, die von einer festen Geraden g den festen Abstand a haben, ist das **Parallelenpaar** (h_1,h_2) zur gegebenen Geraden im gegebenen Abstand.	$d(X;g) = a$	
Der g.O. aller Punkte, die von zwei festen Punkten A, B den gleichen Abstand haben, ist die **Mittelsenkrechte** m_{AB} der Verbindungsstrecke dieser Punkte.	$\overline{AX} = \overline{BX}$	
Der g.O. aller Punkte, die von zwei festen einander schneidenden Geraden g , h den gleichen Abstand haben, ist das Paar der beiden **Winkelhabierenden** (w_1,w_2) der durch die beiden Geraden gebildeten Winkel	$d(X;g)=d(X;h)$ und $g \cap h = \{S\}$	
Der g.O. aller Punkte, die von zwei verschiedenen festen Parallelen den gleichen Abstand haben, ist die **Mittelparallele** p dieses Parallelenpaars.	$d(X;g)=d(X;h)$ und $g \parallel h$	
Der g.O. der Spitzen aller über derselben Grundlinie $\overline{AB}$ errichteten Dreiecke, welche einen Winkel mit gegebener Größe an der Spitze haben, ist der über dieser Grundlinie als Sehne errichtete **Kreisbogen**, der den gegebenen Winkel als Peripheriewinkel fasst (bzw. das entsprechende Kreisbogenpaar).	$\angle AXB = \varphi$	
Der g.O. der Spitzen aller inhaltsgleichen Dreiecke über derselben Grundlinie $\overline{AB}$ ist eine **Parallele** p zu dieser Grundseite (bzw. das entsprechende Parallelenpaar (p,p_1)).	$J(ABX) = c$	
Der g.O. der Spitzen aller über derselben Grundlinie $\overline{AB}$ errichteten Dreiecke, deren andere Seiten in einem gegebenen Verhältnis stehen, ist der **Halbkreis** (bzw. Kreis) über einem Durchmesser $\overline{PQ}$, dessen Endpunkte die Grundlinie innen bzw. außen in dem gegebenen Verhältnis teilt.	$\overline{AX} : \overline{BX} =$ $b:a$