B e z i r k s k o m i t e e   C h e m n i t z

zur Förderung math.- nat. begabter und interessierter Schüler

www.bezirkskomitee.de

K o r r e s p o n d e n z z i r k e l   M a t h e m a t i k

E i n i g e   g r u n d l e g e n d e   p l a n i m e t r i s c h e   S ä t z e

(Mit "Z" wird die Zusammenfassung eines Satzes "S" und einer wahren Umkehrung "U" dieses Satzes bezeichnet.)

I. B E W E G U N G E N

(1) *Verschiebungen* $V(\overrightarrow{PP'})$, *Drehungen* $Dr(M;\varphi)$, *Geradenspiegelungen* $Sp(g)$ und *Punktspiegelungen* $Sp(P)$ sowie alle aus diesen Abbildungen durch Nacheinanderausführung entstehenden Abbildungen sind Bewegungen.

(2) Einige *Eigenschaften* von Bewegungen:

a) *Eindeutige Verknüpfbarkeit:* Die Nacheinanderausführung zweier Bewegungen ergibt stets wieder eine Bewegung.

b) *Umkehrbarkeit:* Zu jeder Bewegung gibt es eine eindeutig bestimmte entegegengesetzte Bewegung (die mit der Ausgangsbewegung verknüpft die identische Abbildung ergibt).

c) *Geradentreue, Strahlentreue, Streckentreue:* Das Bild einer Geraden (eines Strahls, einer Strecke) ist stets wieder eine Gerade (ein Strahl, eine Strecke).

d) *Inzidenztreue:* Wenn $A \in a$, dann gilt auch für die Bilder $A' \in a'$.

e) *Anordnungstreue:* Wenn B zwischen A und C , dann B' zwischen A' und C' .

f) *Parallelentreue:* Wenn $g \parallel h$ und $g,h \xrightarrow{Bew} g',h'$, dann $g' \parallel h'$.

g) *Mittelpunktstreue:* Das Bild des Mittelpunkts einer Strecke ist stets auch der Mittelpunkt der Bildstrecke.

h) *Winkeltreue:* Wenn $\alpha \xrightarrow{Bew} \beta$, dann $\alpha = \beta$.

i) *Längentreue:* Wenn $\overline{AB} \xrightarrow{Bew} \overline{A'B'}$, dann $\overline{AB} = \overline{A'B'}$.

k) *Inhaltstreue:* Wenn $F \xrightarrow{Bew} F'$, dann $A_F = A_{F'}$.

Ia. V e r s c h i e b u n g e n $V(\overrightarrow{PP'})$

(3) Eine (von der identischen Abbildung verschiedene) orientierungserhaltende Bewegung ist genau dann eine *Verschiebung*, wenn sie *keinen Fixpunkt* besitzt.

(4)a) Wenn $g \xrightarrow{V(PP')} h$, dann $g \parallel h$.

b) Wenn $g \parallel h$, dann gibt es eine Verschiebung $V(\overrightarrow{PP'})$, so dass $g \xrightarrow{V(PP')} h$.

Ib. D r e h u n g e n $Dr(M;\varphi)$

(5) Eine (von der identischen Abbildung verschiedene) Bewegung ist genau dann eine *Drehung*, wenn sie *genau einen Fixpunkt* (das Drehzentrum) besitzt.

(6) Wenn $g \xrightarrow{Dr(M;\varphi)} h$, dann $\sphericalangle(g,h) = \varphi$

Ic. Geradenspiegelungen Sp(g)

(7) Eine Bewegung ist genau dann eine *Geradenspiegelung*, wenn sie *genau eine Fixpunktgerade* (die Spiegelgerade) besitzt.

(8) $g \xrightarrow{Sp(g)} h$ genau dann, wenn $g \perp h$.

(9) $P \xrightarrow{Sp(g)} P$ genau dann, wenn $P \in g$.

(10) Wenn $F \xrightarrow{Sp(g)} F'$, dann $F' \xrightarrow{Sp(g)} F$; [Sp(g) ist eine *involutorische* Abbildung] .

Id. Punktspiegelungen Sp(P)

(11) Sp(P) = Dr(P;180°) .

(12) $g \xrightarrow{Sp(P)} g$ genau dann, wenn $P \in g$.

(13) Wenn $g \xrightarrow{Sp(P)} h$, dann $g \| h$.

(14) Wenn $F \xrightarrow{Sp(P)} F'$,dann $F' \xrightarrow{Sp(P)} F$; [Sp(P) ist eine *involutorische* Abbildung] .

Ie. Verknüpfung von Bewegungen

(15) $V(\overrightarrow{AB}) \circ V(\overrightarrow{BC}) = V(\overrightarrow{AC})$.

(16) $Dr(M_1;\varphi_1) \circ Dr(M_2;\varphi_2) = Dr(M;\varphi_1+\varphi_2)$, falls $\varphi_1+\varphi_2 \neq 0°,360°$.

(17) $Sp(g) \circ Sp(h) = Dr(S;2\sphericalangle(g,h))$, falls $g \cap h = \{S\}$.

(18) $Sp(g) \circ Sp(h) = V(\overrightarrow{PP'})$, falls $g \| h$, wobei $\overline{PP'} = 2d(g,h)$.

(19) $Sp(A) \circ Sp(B) = V(2\overrightarrow{AB})$.

II. WINKEL

S1a) *Nebenwinkel* ergänzen sich zu 180° .

S1b) *Scheitelwinkel* sind einander gleich .

S2a) *Stufenwinkel* an geschnittenen Parallelen sind einander gleich .

S2b) *Wechselwinkel* an geschnittenen Parallelen sind einander gleich .

S2c) *Entgegengesetzt liegende Winkel* an geschnittenen Parallelen ergänzen sich zu 180°.

U2a) Wenn Stufenwinkel einander gleich sind, dann sind die geschnittenen Geraden parallel.

Bilde entsprechend U2b) und U2c) !

S3) Winkel mit paarweise parallelen oder orthogonalen Schenkeln sind gleich, wenn entweder beide spitz oder beide stumpf sind.

III. SYMMETRIE

S1) Zu zwei verschiedenen Punkten gibt es genau eine *Symmetrieachse* (die gleichzeitig die *Mittelsenkrechte* der zugehörigen Strecke ist).

Z2a) P liegt genau dann auf der Mittelsenkrechten von $\overline{AB}$, wenn $\overline{AP} = \overline{PB}$ gilt; (dabei sei $A \neq B$) .

S2b) Die Symmetrieachse zu zwei Punkten halbiert die Verbindungsstrecke dieser Punkte und steht auf ihr senkrecht.

S2c) Verbindet man einen Punkt der Symmetrieachse mit zwei symmetrisch gelegenen Punkten, dann schließen die Verbindungsstrecken mit der Achse einander gleiche Winkel ein.

Bilde wahre Umkehrungen von S2b) und S2c) !

IV: D R E I E C K E

IVa. G l e i c h s c h e n k l i g e u n d g l e i c h s e i t i g e D r e i e c k e

S1a) Jedes *gleichschenklige* Dreieck besitzt eine *Symmetrieachse* .

U1a) Wenn ein Dreieck eine *Symmetrieachse* besitzt, dann ist es *gleichschenklig* .

S1b) Besitzt ein Dreieck genau eine Symmetrieachse, dann geht diese durch die Spitze des (gleichschenkligen) Dreiecks, halbiert den Winkel an der Spitze, halbiert die Basis und steht auf ihr senkrecht.

S1c) *Basiswinkelsatz:* In jedem gleichschenkligen Dreieck sind die Basiswinkel einander gleich.

U1c) Wenn in einem Dreieck zwei Winkel einander gleich sind, dann ist dieses Dreieck gleichschenklig.

Z2a) Wenn ein Dreieck gleichseitig ist, dann besitzt es genau drei Symmetrieachsen, und umgekehrt.

Z2b) Jedes gleichseitige Dreieck ist gleichwinklig, und umgekehrt.

IVb. W i n k e l u n d S e i t e n i m D r e i e c k

S3) In jedem Dreieck beträgt die *Summe der Innenwinkel* 180° .

S4a) In jedem Dreieck beträgt die *Summe der Außenwinkel* 360° .

S4b) Jeder *Außenwinkel* eines Dreiecks ist gleich der Summe der beiden nicht anliegenden Innenwinkel dieses Dreiecks.

S4c) Jeder Außenwinkel eines Dreiecks ist größer als jeder der beiden nicht anliegenden Innenwinkel dieses Dreiecks.

S5a) In jedem Dreieck ist die Summe zweier Seiten stets größer als die dritte Seite und jede Seite stets größer als die Differenz der beiden anderen Seiten (*Dreiecksungleichung*) .

Z5b) In jedem Dreieck liegen gleiche Seiten gleichen Winkeln gegenüber und umgekehrt.

Z5c) In jedem Dreieck liegt der größeren von zwei Seiten der größere Winkel gegenüber, dem größeren von zwei Winkeln die größere Seite gegenüber.

S6) Die Strecke, die die Mittelpunkte zweier Seiten eines Dreiecks verbindet (d.h. die *Mittellinie*) verläuft parallel zur dritten Seite dieses Dreiecks und ist gleich deren Hälfte.

IVc. Kongruenz von Dreiecken

Z7) *Kongruenzsatz:* Zwei Dreiecke sind kongruent genau dann, wenn in diesen Dreiecken alle entsprechenden Seiten (Strecken) gleich lang und alle entsprechenden Winkel gleich groß sind.

S8a) *Kongruenzsatz **sss** :* Dreiecke sind kongruent, wenn sie in den drei Seiten übereinstimmen.

S8b) *Kongruenzsatz **sws** :* Dreiecke sind kongruent, wenn sie in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel übereinstimmen .

S8c) *Kongruenzsatz **wsw** :* Dreiecke sind kongruent, wenn sie in einer Seite und den beiden dieser Seite anliegenden Winkeln übereinstimmen .

S8d) *Kongruenzsatz **SsW** :* Dreiecke sind kongruent, wenn sie in zwei Seiten und dem der größeren Seite gegenüberliegenden Winkel übereinstimmen.

IVd. Transversalen und ausgezeichnete Punkte im Dreieck

S9a) Die drei *Mittelsenkrechten* eines Dreiecks schneiden einander in einem Punkt, dem *Umkreismittelpunkt* dieses Dreiecks.

S9b) Die drei *Winkelhalbierenden* eines Dreiecks schneiden einander in einem Punkt, dem *Inkreismittelpunkt* dieses Dreiecks.

S9c) Die drei *Seitenhalbierenden* eines Dreiecks schneiden einander in einem Punkt, dem *Schwerpunkt* dieses Dreiecks.
Dieser teilt jede Seitenhalbierende vom Eckpunkt aus im Verhältnis $2:1$.

S9d) Die drei *Höhen* eines Dreiecks schneiden einander in einem Punkt.

S9e) Die Halbierende eines Innenwinkels und die Halbierenden der beiden ihm nicht anliegenden Außenwinkel eines Dreiecks schneiden einander in einem Punkt (einem *Ankreismittelpunkt*) .

S10) Die Halbierende eines Innenwinkels (Außenwinkels) eines Dreiecks teilt die Gegenseite innen (außen) im Verhältnis der anliegenden Seiten.

S10a) Die Halbierende eines Innenwinkels eines Dreiecks schneidet den Umkreis dieses Dreiecks im Mittelpunkt des Kreisbogens, der zur Gegenseite des betreffenden Winkels gehört.

S11) Es gilt stets: $a : b = h_b : h_a$.

S12) In jedem gleichschenkligen Dreieck fallen die vier zur Basis gehörenden Transversalen zusammen.

S13) Der Schwerpunkt S , der Höhenschnittpunkt H und der Umkreismittelpunkt M liegen auf einer Geraden, die *Eulersche Gerade* genannt wird. S teilt die Strecke $\overline{HM}$ im Verhältnis $2:1$.

S14) Die drei Seitenmittelpunkte, die drei Höhenfußpunkte und die drei Mittelpunkte der oberen Höhenabschnitte liegen auf einem Kreis, der *Feuerbachscher Kreis* genannt wird.
Der Mittelpunkt des Feuerbachschen Kreises liegt auf der Eulerschen Geraden und halbiert die Eulersche Strecke $\overline{HM}$.

IVe. Rechtwinklige Dreiecke (Satzgruppe des Pythagoras)

Seien a , b , c die Längen der Seiten $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ eines Dreiecks; seien p , q die Längen der Projektionen von $\overline{BC}$ bzw. $\overline{CA}$ auf $\overline{AB}$; sei h die Länge der Höhe auf $\overline{AB}$.
Dann gilt für alle Dreiecke:

Z15a) Ein Dreieck ist rechtwinklig genau dann, wenn $a^2 + b^2 = c^2$ gilt.
(*Satz des Pythagoras* und Umkehrung)

Z15b) Ein Dreieck ist rechtwinklig genau dann, wenn $a^2 = pc$ und $b^2 = qc$ gilt.
(*Kathetensatz* und Umkehrung)

S15c) Wenn ein Dreieck rechtwinklig ist, dann gilt $h^2 = pq$. (*Höhensatz*)

V. VIERECKE

S1) In jedem Viereck beträgt die *Summe der Innenwinkel* 360° .

S2a) In jedem *Trapez* ergänzen sich die einem Schenkel anliegenden Winkel zu 180° .

S2b) Wenn $ABCD$ ein Trapez mit den Grundseiten $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ ist und m die *Mittelparallele* dieses Trapezes ist, dann halbiert m die Schenkel $\overline{AD}$ und $\overline{BC}$ des Trapezes.

U2b) Wenn $ABCD$ ein Trapez mit den Grundseiten $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ ist und m die Schenkel $\overline{AD}$ und $\overline{BC}$ des Trapezes halbiert, dann ist m die *Mittelparallele* des Trapezes.

S2c) Die *Mittellinie* eines Trapezes ist halb so lang wie beide Grundlinien zusammen.

Z2d) Ein *Trapez* ist gleichschenklig genau dann, wenn die einer Grundseite anliegenden Winkel gleich groß sind.

Z3) Ein Viereck ist ein *Parallelogramm* genau dann, wenn:
- a) die gegenüberliegenden Seiten paarweise gleich lang sind ;
- b) die gegenüberliegenden Winkel paarweise gleich groß sind ;
- c) die Diagonalen einander halbieren ;
- d) alle nebeneinanderliegenden Winkel sich zu 180° ergänzen :
- e) das Viereck zentralsymmetrisch ist (mit dem Diagonalenschnittpunkt als Symmetriezentrum) .

S4a) In jedem *Rechteck* sind die Diagonalen gleich lang.

Z4b) Ein Parallelogramm ist genau dann ein *Rechteck*, wenn seine Diagonalen gleich lang sind.

S5a) In jedem *Rhombus* stehen die Diagonalen aufeinander senkrecht.

Z5b) Ein Parallelogramm ist genau dann ein Rhombus, wenn seine Diagonalen aufeinander senkrecht stehen.

Z6) Ein Parallelogramm ist genau dann ein *Quadrat* , wenn seine Diagonalen gleich lang sind und aufeinander senkrecht stehen.

S7a) In jedem *Drachenviereck* stehen die Diagonalen aufeinander senkrecht, und eine der Diagonalen halbiert die andere.

S7b) Jedes *Drachenviereck* besitzt genau eine Symmetrieachse.

VI. K R E I S

S1) Drei verschiedene, nicht auf einer Geraden liegende Punkte bestimmen genau einen Kreis k(M;r) .

S2) Jeder Kreis ist *zentralsymmetrisch* in bezug auf seinen Mittelpunkt und *axialsymmetrisch* in bezug auf jeden seiner Durchmesser.

VIa. K r e i s u n d G e r a d e b z w. S t r e c k e

Z3a) Zwei *Sehnen* eines Kreises sind genau dann gleich lang, wenn die Abstände der Sehnen vom Mittelpunkt des Kreises gleich sind.

Z3b) Die größere von zwei Sehnen eines Kreises hat den kleineren Abstand vom Mittelpunkt und umgekehrt.

S3c) Zu gleichen *Zentriwinkeln* eines Kreises gehören gleiche Bogen und Sehnen.
(Bestimme wahre Umkehrungen dieses Satzes!)

S4) Das vom Mittelpunkt eines Kreises auf eine Sehne dieses Kreises gefällte Lot halbiert diese Sehne.

$U_1$4) Die Gerade, die durch den Mittelpunkt einer Sehne eines Kreises geht und auf dieser Sehne senkrecht steht (d.h. die Mittelsenkrechte dieser Sehne) geht durch den Mittelpunkt des Kreises.
$U_2$4) Die Gerade, die durch den Mittelpunkt eines Kreises und durch den Mittelpunkt einer (von einem Durchmesser verschiedenen) Sehne dieses Kreises geht, steht auf dieser Sehne senkrecht.

S5a) Der *Berührungsradius* einer Tangente eines Kreises steht auf dieser Tangente senkrecht.

U5a) Die auf dem Radius $\overline{MP}$ eines Kreises in P errichtete Senkrechte ist Tangente dieses Kreises.

S5b) Das vom Kreismittelpunkt auf eine Tangente gefällte Lot geht durch den Berührungspunkt.

U5b) Die auf einer Tangente im Berührungspunkt errichtete Senkrechte geht durch diesen Berührungspunkt.

S6) Schneiden sich zwei Tangenten eines Kreises, so sind die Tangentenabschnitte einander gleich, die Zentrale des Schnittpunkts halbiert den Winkel zwischen den Tangenten und steht auf der Berührungssehne senkrecht.

S7a) *Sehnensatz:* Schneiden zwei Sehnen eines Kreises einander, dann ist das Produkt der Abschnitte der einen Sehne gleich dem Produkt der Abschnitte der anderen Sehne.

S7b) *Sekantensatz:*
Schneiden zwei Sekanten eines Kreises einander außerhalb dieses Kreises, dann ist das Produkt der (vom Schnittpunkt aus gemessenen) Sekantenabschnitte auf beiden Sekanten gleich.

S7c) *Sekantentangentensatz:*
Schneiden eine Sekante und eine Tangente eines Kreises einander, dann ist das Quadrat des Tangentenabschnitts gleich dem Produkt der Sekantenabschnitte.

VIb. K r e i s   u n d   W i n k e l

S8a) *Peripheriezentriwinkelwinkelsatz:*
Jeder Peripheriewinkel ist halb so groß wie der Zentriwinkel, der mit ihm über demselben Kreisbogen steht.

U8a) Jeder über einem Kreisbogen stehende Winkel, der halb so groß ist wie der zugehörige Zentriwinkel, ist ein Peripheriewinkel (d.h. sein Scheitel liegt auf dem zugehörigen Kreis).

S8b) *Peripheriewinkelsatz:*
Alle Peripheriewinkel, die über demselben Bogen stehen, sind gleich.

S9) *Satz des Thales:*
Wenn ein Peripheriewinkel eines Kreises über einem Durchmesser dieses Kreises steht, dann ist er ein rechter Winkel.

$U_1$9) Wenn ein rechter Winkel über einem Durchmesser eines Kreises steht, dann ist er ein Peripheriewinkel dieses Kreises (d.h. sein Scheitel liegt auf dem Kreis).

$U_2$9) Wenn ein Peripheriewinkel eines Kreises ein rechter Winkel ist, dann steht er über einem Durchmesser dieses Kreises (d.h. seine Schenkel gehen durch die Endpunkte eines Durchmessers dieses Kreises).

S10) *Sehnentangentenwinkelsatz:*
Jeder Sehnentangentenwinkel eines Kreises ist gleich groß wie jeder zugehörige Peripheriewinkel dieses Kreises.

VIc. K r e i s   u n d   V i e r e c k (Es werden nur konvexe Vierecke betrachtet.)

Z11) Ein Viereck ist ein *Sehnenviereck* genau dann, wenn die Summe zweier gegenüberliegender Winkel dieses Vierecks stets 180° beträgt.

S12) *Satz des Ptolomäus:*
In jedem Sehnenviereck ist das Produkt der Diagonalen gleich der Summe der Produkte der gegenüberliegenden Seiten.

Z13) Ein Viereck ist *Tangentenviereck* genau dann, wenn in diesem Viereck die Summe zweier gegenüberliegender Seiten stets gleich der Summe der beiden anderen gegenüberliegenden Seiten ist.

VId. Z w e i   K r e i s e

S14) Jede gemeinsame Sehne zweier Kreise wird von der gemeinsamen Zentralen halbiert und steht auf ihr senkrecht.

S15) Der Berührungspunkt zweier Kreise liegt stets auf der gemeinsamen Zentralen dieser Kreise.

U15) Zwei Kreise, die einen Punkt der gemeinsamen Zentralen gemeinsam haben, berühren einander.

S16) Die gemeinsamen Tangenten zweier einander schneidender Kreise sind axialsymmetrisch bezüglich der gemeinsamen Zentralen.

VII. ÄHNLICHKEITSABBILDUNGEN - ÄHNLICHKEIT - STRAHLENSÄTZE

S1) *Streckungen* werden durch ihr Streckungszentrum Z und ihren Streckungsfaktor k ($\neq 0$) eindeutig festgelegt.

S2) Die *Nacheinanderausführung* zweier Streckungen ergibt stets entweder eine Streckung oder eine Verschiebung.

Z3) Eine umkehrbar eindeutige Abbildung einer Ebene auf sich ist eine *Ähnlichkeitsabbildung* genau dann, wenn sie entweder eine Bewegung oder eine Streckung oder die Nacheinanderausführung einer Bewegung und einer Streckung ist.

S4) Ähnlichkeitsabbildungen haben dieselben *Eigenschaften* wie Bewegungen (vgl. I.), mit Ausnahme der Längen- und der Inhaltstreue.
An deren Stelle gilt:

a) Wenn $\overline{AB} \xrightarrow{Ä(Z;k)} \overline{A'B'}$, dann $\overline{A'B'} = k \cdot \overline{AB}$.

b) Wenn $F \xrightarrow{Ä(Z:k)} F'$, dann $A_{F'} = k^2 \cdot A_F$.

Z5) *Hauptähnlichkeitssatz:*
Dreiecke sind ähnlich genau dann, wenn sie in allen Winkeln übereinstimmen und wenn die Verhältnisse aus entsprechenden Seiten (Strecken) stets gleich sind.

S6) *Ähnlichkeitssätze:* Dreiecke sind ähnlich, wenn sie übereinstimmen

a) in zwei Winkeln;

b) in drei Seitenverhältnissen;

c) im Verhältnis zweier Seiten und dem von diesen Seiten eingeschlossenen Winkel;

d) im Verhältnis zweier Seiten und dem der größeren dieser Seiten gegenüberliegenden Winkel.

S7) Im rechtwinkligen Dreieck sind die durch die Höhe auf die Hypotenuse gebildeten Teildreiecke untereinander und dem Ausgangsdreieck ähnlich.

S8) *Strahlensätze:*

Werden Strahlen (Geraden) eines Büschels von Parallelen geschnitten, dann verhalten sich

a) die Abschnitte auf einem Strahl (einer Geraden) wie die entsprechenden Abschnitte auf einem anderen Strahl (einer anderen Geraden) dieses Büschels.

b) die zwischen denselben Strahlen (Geraden) liegenden Parallelenabschnitte wie die vom Scheitelpunkt aus gemessenen entsprechenden Abschnitte auf einem Strahl (einer Geraden) dieses Büschels.

c) die zwischen zwei Strahlen (Geraden) des Büschels gelegenen Abschnitte auf zwei Parallelen wie die auf zwei anderen Strahlen (Geraden) gelegenen Abschnitte auf denselben Parallelen.

S9) Die *Inhalte* ähnlicher Figuren verhalten sich wie die Quadrate der Längen entsprechender Strecken.