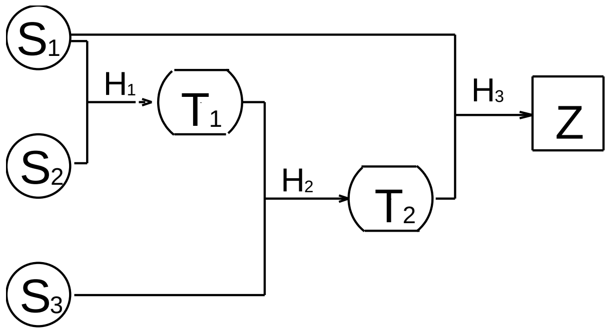
B e z i r k s k o m i t e e   C h e m n i t z
zur Förderung math.- nat. begabter und interessierter Schüler
www.bezirkskomitee.de

K o r r e s p o n d e n z z i r k e l   M a t h e m a t i k

Einige Regeln zum Lösen von problemhaften Aufgaben

Eine jede *Aufgabe* enthält Informationen über *"Start"* und *"Ziel"* .
Eine Aufgabe lösen heißt, auf irgendeine Weise irgendeinen Weg vom Start zum Ziel zu finden.
Dieser Weg führt in der Regel über gewisse *"Teilziele"* , die mit Hilfe gewisser *"Hilfsmittel"* erreicht werden.
In solchen Fällen lässt sich der Lösungsplan in Form eines *"Lösungsgraphen"* festhalten.
Die Belegung der Knoten und der Kanten eines solchen Graphen ist der nebenstehenden Skizze zu entnehmen.



Es ist zweckmäßig, zwischen *"Beweisaufgaben"* und zwei Arten von *"Bestimmungsaufgaben"* zu unterscheiden:

Aufgabe	*Start*	*Ziel*	*Teilziele*	*Hilfsmittel*
Beweis-aufgabe	Voraussetzungen	Behauptung	"Feststellungen"	Sätze, Definitionen, Umformungsregeln u.ä.
Bestim-mungs-aufgabe	Gegebenes	Gesuchtes		
	Daten (nebst Beziehungen)	Unbekannte	Hilfsgrößen	Formeln, Umformungsregeln, Sätze, Definitionen u.ä.
	(Konjunktion von) Aussageformen (Bedingungen)	Erfüllungsmenge	"Hilfsmengen"; vereinfachte Aussageformen	Umformungsregeln, Sätze, Definitionen, logische Schlussregeln u.ä.

Im außerunterrichtlichen Bereich werden bis Klassenstufe 10 vor allem folgende *Arten von Bestimmungs- und Beweisaufgaben* behandelt:

- *Geometrische* Aufgaben (einschließlich Konstruktions- und Ortsaufgaben als spezielle Bestimmungsaufgaben) ;
- *Zahlentheoretische* Aufgaben (über dem Bereich der natürlichen oder der ganzen Zahlen) ;
- *Arithmetische* Aufgaben (über dem Bereich der rationalen oder der reellen Zahlen) mit dem Teilgebiet *"Gleichungen/Ungleichungen" ;*
- Logisch-kombinatorische Aufgaben .

Ferner lohnt es, *Sach- und Anwendungsaufgaben* als eine spezielle Art von Bestimmungsaufgaben hervorzuheben.

Allgemeine Regeln zum Lösen problemhafter Aufgaben

(I) ***E r f a s s e n   d e r   A u f g a b e***

(1)
- Sind alle vorkommenden *Begriffe klar*?
- Ist eine günstige *Veranschaulichung* möglich? (*Figur, Skizze, Tabelle* o.ä.)
- *Start* und *Ziel* der Aufgabe ermitteln!
  (*Voraussetzungen - Behauptung ; Gegebenes - Gesuchtes*)
- *Günstige Bezeichnungen* einführen!
  Zweckmäßige Symbolik wählen, um so Start und Ziel übersichtlich festhalten zu können!
- Deutet der Aufgabentext darauf hin, dass ein *spezielles heuristisches Prinzip* nützlich sein könnte?
  (*Schubfachprinzip, Extremalprinzip, Symmetrieprinzip, Invarianzprinzip* u.ä.)

(II) ***F i n d e n   e i n e s   L ö s u n g s p l a n s***

- Wurde eine *ähnliche Aufgabe* bereits gelöst ?
  Welche Vorgehensweisen zum Lösen solcher Aufgaben sind bekannt?
- Erfolgversprechende *analoge Vorgehensweise* wählen!
- Zerlege die Aufgabe in überschaubare *Teilaufgaben* !
  - Ist eine *Fallunterscheidung* erforderlich?
- In welcher *Reihenfolge* sind diese Teilaufgaben zu lösen?

(2.1) *V o r w ä r t s a r b e i t e n   (VA)*
- Welche *ableitbaren Teilziele* (*Feststellungen, Hilfsgrößen*) lassen sich von den Voraussetzungen bzw. den gegebenen Größen ausgehend unmittelbar erreichen (ableiten, berechnen)?

  Begründung!
  - Welche *Hilfsmittel* (*Sätze, Definitionen, Formeln* u.ä.) enthalten die Voraussetzungen bzw. die gegebenen Größen?
    (Diese Hilfsmittel können ableitbare Teilziele liefern!)

(2.2) *R ü c k w ä r t s a r b e i t e n (RA)*
- Von welchen *hinreichenden Teilzielen* aus ließe sich das Ziel unmittelbar erreichen?

  Begründung!
  - Welche *Hilfsmittel* (*Sätze, Formeln, Definitionen* u.ä.) enthalten die Behauptung bzw. die gesuchte Größe?
    (Diese Hilfsmittel können hinreichende Teilziele liefern!)

Man *arbeite von abgeleiteten Teilzielen aus vorwärts*, *von hinreichenden Teilzielen aus rückwärts*, bis ein Weg vom Start zum Ziel gefunden wurde.
Ein auf diese Weise gefundener *Lösungsplan* lässt sich stets in Form eines *Lösungsgraphen* festhalten.

(3) *G r u n d m e t h o d e* *zum Lösen von Bestimmungsaufgaben* *(Gl)*

- Führe günstige *Variable* ein und halte die gegebenen Beziehungen oder Bedingungen bzw. die gefundene Gesetzmäßigkeit in Form einer *Gleichung* fest.

- *Suche nach Beziehungen* (das sind allgemein Aussageformen, oft *Gleichungen*) *zwischen* den *gegebenen*, den *gesuchten* und u.U. noch günstig gewählten *Hilfsgrößen* ?
  - ° Die Anzahl der benötigten Gleichungen ist gleich der Summe der Anzahlen von gesuchten Größen und Hilfsgrößen.

- *Eliminiere die Hilfsgrößen!*

Um *von gegebenen oder gefundenen Aussageformen* (Bedingungen, Beziehungen, Gleichungen o.ä.) *zur gesuchten Erfüllungsmenge* zu gelangen, kann man folgende Wege einschlagen:

(3.1) *Durchschnittsbildung von Erfüllungsmengen:*

- *Ermittle zu jeder Bedingung* (Beziehung, Aussageform) *die* zugehörige *Erfüllungsmenge!*

  Bilde den *Durchschnitt dieser Erfüllungsmengen* !
  - ◦ Die Elemente endlicher Erfüllungsmengen kann man im Prinzip stets durch *"systematisches Erfassen aller möglichen Fälle"* ermitteln.
    Dabei ist es oft zweckmäßig, *Tabellen* zu verwenden.

- Ermittle die Erfüllungsmenge der *"informativsten" Bedingung*, (das ist die Bedingung mit der "kleinsten" Erfüllungsmenge, die das Suchfeld am stärksten einengt).

  Sondere aus dieser Menge alle diejenigen *Elemente aus*, die eine der anderen Bedingungen nicht erfüllen!

(3.1.1.) *Systematisches Probieren (Erfassen aller möglichen Fälle)*

- Ermittle eine *Reihenfolge* der Elemente des Erfüllungsgrundbereichs, die mit Sicherheit alle "möglichen" Elemente (Fälle) enthält!

- Entscheide für jedes Element (jeden Fall), ob es (er) die gegebene Bedingung (Beziehung, Gleichung, Ungleichung, allgemein Aussageform) erfüllt!

(3.2) *Folgern zum Zweck des Vereinfachens*

- *Forme die Bedingungen* (Beziehungen, Aussageformen o.ä.) günstig *um*, ziehe *zweckmäßige Folgerungen*!

  Ermittle nach einer solchen *Vereinfachung* die gesuchte Erfüllungsmenge.

  (Dies ist eine spezielle Form des *Vorwärtsarbeitens*.)
  - ◦ Welche der gegebenen Bedingungen ist (vermutlich) die *"informativste Bedingung"* (das ist die Bedingung mit der "kleinsten" Erfüllungsmenge)?
  - ◦ *Was lässt sich* aus dieser Bedingung *unmittelbar folgern*? *Begründung*!
  - ◦ Welches ist die *"nächst informative Bedingung"*?

◦ Was lässt sich aus ihr (und den bereits gezogenen Schlussfolgerungen) *folgern*?

(4) *Rückführungsprinzip*

- Kannst du eine Aufgabe nicht lösen, dann wende dich zunächst einer günstig gewählten *v e r w a n d t e n , l e i c h t e r e n A u f g a b e* zu!

(4.1) - Versuche die Aufgabe für einen *Spezialfall* zu lösen! Vielleicht helfen die so gefundenen Lösungsideen auch beim Lösen der Ausgangsaufgabe weiter.

- Auch die Beschäftigung mit *Verallgemeinerungen*, *Grenzfällen* und *analogen Fällen* kann diesem Zweck dienen.
- Gehe bei einer *parameterhaltigen Aufgabe* zu einer zugehörigen *Aufgabe mit* geschickt gewählten *konkreten Daten* über!
- *Variiere* den *Start* oder das *Ziel* !

(4.2) - Suche nach bereits *gelösten Aufgaben*, auf die sich die zu lösende Aufgabe *zurückführen* lässt!

- Formuliere *"Hilfsaufgaben"*, deren Lösung das Lösen der gestellten Aufgabe ermöglichen würden!

(5) *Transformationsprinzip*

- *Übersetze* (*t r a n s f o r m i e r e*) die Aufgabe *in die Sprache einer günstig gewählten mathematischen Disziplin*!
  - ◦ Verwende dabei die Strategien (2.1) *Vorwärtsarbeiten*, (2.2) *Rückwärtsarbeiten* und 3) *"Suche nach Gleichungen"* !
- *Löse die* (gleichbedeutende) *transformierte Aufgabe* mit den Hilfsmitteln dieser Disziplin!
- *Deute* das Ergebnis (Rückübersetzung in den Ausgangsbereich)!

[Bei "nichtmathematisch" formulierten Sach- und Anwendungsaufgaben muss man so vorgehen; bei "innermathematischen" Aufgaben ist es manchmal günstig, so vorzugehen.]

(6) *Kenntniserweiterung*

- Kannst du eine Aufgabe trotz aller Anstrengungen nicht lösen, dann muss du zunächst deine *K e n n t n i s s e e r w e i t e r n .*
  Besorge dir aus einschlägiger *Literatur* neue Anregungen und neue Hilfsmittel.

(III) ***A u s f ü h r e n d e s P l a n s ; D a r s t e l l e n d e r L ö s u n g***

(Dies ist eine erlernbare Technik, bei der heuristische Vorgehensweisen keine Rolle spielen.)

(IV) ***K o n t r o l l e u n d A u s w e r t u n g***

- *Kontrolliere* das Resultat, den Beweis!

Wurde jeder Lösungsschritt hinreichend begründet?

(Manchmal ist eine *Probe am Spezialfall* sehr nützlich.)

- Überlege, *welche heuristische Vorgehensweise* dir beim Lösen der Aufgabe besonders *geholfen hat*! Merke es dir!

  Bei welchen anderen Aufgaben würdest du *analog* vorgehen?
- Wurden alle gegebenen Größen oder Bedingungen bzw. alle Voraussetzungen für die Lösung verwendet?
  - Ist dies nicht der Fall, dann ist entweder die Lösung fehlerhaft oder die Aufgabe lässt sich verallgemeinern.
- Formuliere eine *neue, verwandte Aufgabe* (eine *analoge* oder eine *verallgemeinerte* Aufgabe; eine wahre *Umkehrung* des bewiesenen Satzes; o.ä.) !

Folgendes Schema hält fest, in welchen Reihenfolgen diese durchnummerierten "Impulsblöcke" durchlaufen werden können, wobei in der Regel "Schleifen" auftauchen.
Der Prozess der Lösungsfindung wird durch eine "STOP" beendet, wenn ein Lösungsplan gefunden wurde. Da es sich hierbei um einen heuristischen Prozess handelt, wird dieses Ziel keineswegs mit Sicherheit erreicht.

Aus diesem *"allgemeinen Regelsystem"* kann man durch Interpretation und Konkretisierung der vorkommenden Begriffe sowie durch spezifische Ergänzungen *"spezielle Regelsysteme"* für das Lösen der genannten Aufgabenarten gewinnen.
Durch Verwenden der eingeführten Nummern für die einzelnen Impulsblöcke soll dieser wichtige Zusammenhang festgehalten werden. So kann man erkennen, dass man beim Lösen der inhaltlich sehr verschiedenen speziellen Aufgabenarten im Prinzip stets immer wieder nur einige wenige heuristische Vorgehensweisen einsetzt.

Regeln zum Lösen von geometrischen Beweisaufgaben

(1) Zeichne eine *Figur* ! (Keinen Spezialfall wählen!)
Wie lautet die *Behauptung*, wie lauten die *Voraussetzungen* des Satzes?
Schreibe sie unter Verwendung der in der Figur eingeführten, geschickt gewählten *Bezeichnungen* heraus!

(2.1) Gehe von den *Voraussetzungen* aus!
Welche Festhellungen lassen sich aus ihnen unmittelbar *folgern*?
Welche Sätze oder Definitionen enthalten diese Voraussetzungen?
Sie können als *Beweismittel* dienen!

- Ergänze gegebenenfalls die Figur! Welche ableitbaren Feststellungen führen wohl am einfachsten zum Ziel?

(2.2) Betrachte die *Behauptung*!
Aus welchen Feststellungen ließe sie sich unmittelbar *folgern*?
Welche Sätze oder Definitionen enthalten eine gleichartige Behauptung?
Sie können als *Beweismittel* dienen!

- Hast du ein solches Beweismittel gefunden, dann *ergänze* gegebenenfalls *die Figur* durch zugehörige *Hilfslinien* oder Bezeichnungen.
  Welche der gefundenen hinreichenden Feststellungen führt wohl am einfachsten zum Ziel?
- Manchmal ist es günstig, die *Behauptung äquivalent umzuformen*, um so brauchbare Beweismittel oder Hilfslinien zu finden.

Wende *abwechselnd* die Methode des *Vorwärtsarbeitens und Rückwärtsarbeitens* an, bis du einen Weg von den Voraussetzungen zur Behauptung gefunden hast!

- Welche *neuen Beweismittel* oder *Hilfslinien* legt die dabei laufend ergänzte Figur nahe?
- Bieten sich an einer Stelle *mehrere Beweismittel* an, dann versuche, deren *Erfolgschancen abzuschätzen*!
  Verfolge stets zunächst den Weg, der am einfachsten zu sein scheint!

Wenn du nicht weiterkommst, dann *prüfe* zunächst genau nach, ob du vielleicht eine der *Voraussetzungen nicht verwendet* hast!
Hast du dich durch eine zu spezielle Beweisfigur zu einem Trugschluss verleiten lassen?
Verfolge an einer *neuen Beweisfigur* deine Beweisidee!

(4.1) Versuche, wenigstens einen *Spezialfall* des Satzes zu beweisen!
Betrachte auch *Grenzfälle*, *Verallgemeinerungen* oder *analoge Fälle*!
Das kann zu einer Beweisidee führen!

(4.2) Versuche, zunächst noch unbekannte *Hilfssätze* zu entdecken und zu formulieren, mit deren Hilfe sich der Satz beweisen ließe, und beschäftige dich zunächst mit deren Beweis.
- Überzeuge dich zunächst, dass es sich um *"nützliche"* Hilfssätze handelt, mit deren Hilfe sich der gegebene Satz tatsächlich beweisen lässt.
  Wenn dies der Fall ist, dann versuche, diese Hilfssätze zu beweisen.

(5) *Übersetze* die elementargeometrische Beweisaufgabe in die *Sprache der Vektoralgebra* oder der *Koordinatengeometrie* !
Auch Hilfsmittel aus der *Trigonometrie* und der *Theorie der komplexen Zahlen* sind manchmal von Nutzen.

Regeln zum Lösen von geometrischen Bestimmungsaufgaben

(1) Zeichne eine *Figur* !
Wie lautet die *Unbekannte* ? Wie lauten die *Daten* und die gegebenen *Bedingungen* ?
Führe günstige *Bezeichnungen* ein!

(2.1) Gehe von den *Daten nebst Bedingungen* aus!
Welche Hilfsgrößen lassen sich aus ihnen unmittelbar *berechnen* (bestimmen)?
Welche *Hilfsmittel* (Formeln o.ä.) bieten sich hierzu an?

(2.2) Betrachte die *Unbekannte* !
Aus welchen Hilfsgrößen ließe sie sich unmittelbar *berechnen*?
Als *Hilfsmittel* bieten sich *Formeln oder Beziehungen* an, in denen die Unbekannte vorkommt!

Wende *abwechselnd* die Strategie des *Vorwärts- und Rückwärtsarbeitens* an, bis du einen Weg von den Daten zur Unbekannten gefunden hast!

Wenn du nicht weiterkommst, dann *prüfe* nach, ob du bereits alle *gegebenen Bedingungen* voll *ausgenützt* hast!

(3) *Suche nach Beziehungen* (meist in Form von *Gleichungen*) *zwischen den Daten, der Unbekannten und günstig gewählten Hilfsgrößen* !

(3.2) Löse das entstandene Gleichungssystem!
Eliminiere dabei die eingeführten *Hilfsgrößen*!

- Du brauchst hierzu ein System unabhängiger Gleichungen, deren Anzahl gleich der Summe der Anzahlen der Unbekannten und der Hilfsgrößen ist.

Beachte, dass auch die Anwendung von (2.1) und (2.2) stets auf ein solches Gleichungssystem führt, das jedoch in der Regel sehr leicht lösbar ist, weil sich die eingeführten Hilfsgrößen durch schrittweises Einsetzen eliminieren lassen.
Das Lösen von Gleichungssystemen, die durch Anwenden von (3) gefunden wurden, ist dagegen häufig eine problemhafte Aufgabe.

Kommst du auf diese Weise noch nicht ans Ziel, dann wende analog die Regeln (4.1), (4.2) oder (5) an.

Die genannten Regeln gelten auch für **Beweis- und Bestimmungsaufgaben** aus der **Stereometrie**.
Zusätzlich beachte hier noch folgendes:

(1) Der *Veranschaulichung* der Aufgabenstellung können nicht nur eine Figur in *perspektivischer Darstellung*, eine *Zweitafelprojektion*, ein *Körpernetz* oder eine *Abwicklung* dienen, sondern oft sind auch günstig gewählte *ebene Schnitte*, denen die charakteristischen Eigenschaften des räumlichen Gebildes zu entnehmen sind, ein nützliches Hilfsmittel.

(2.1), (2.2) Neben Begriffen und Sätzen aus der Stereometrie bieten sich dann auch *Sätze aus der Planimetrie als Hilfsmittel* an.

(4) Suche nach einer *analogen Aufgabe aus der Planimetrie* ! Oft lässt sich eine hier erfolgreiche Lösungsidee analog beim Lösen der stereometrischen Aufgabe anwenden.

Regeln zum Lösen von geometrischen Ortsaufgaben

[*Hinweis:* Geometrische Ortsaufgaben sind spezielle Bestimmungsaufgaben. Gesucht ist jeweils eine Punktmenge M , deren Elemente einer gegebenen Bedingung genügen, die sich in Form einer Aussageform $H(X)$ schreiben lässt. Dabei bezeichnet X einen beliebigen Punkt der Ebene (manchmal auch des Raumes) .
Es ist dann zu zeigen: Für alle X gilt: $x \in M \Leftrightarrow H(X)$.]

(I) Versuche, den *gesuchten geometrischen Ort* zu *erraten* !

a) Zeichne eine *genaue Figur* !

b) Betrachte *Spezialfälle* und *Grenzfälle* für die Lage des Punktes X !

c) Hast du eine Vermutung gefunden, dann überprüfe sie anhand von weiteren Spezialfällen!

(II) Versuche, die gefundene *Vermutung* zu *beweisen* !
Verwende hierzu die Regeln zum Lösen von geometrischen Beweisaufgaben!

a) Beachte, dass die Zusammenfassung eines Satzes und einer Umkehrung dieses Satzes zu beweisen ist!
Hierzu sind in der Regel zwei Beweise nötig.

b) Beachte, dass man anstelle des Satzes "Wenn $x \in M$, dann $H(X)$"
auch die mit ihm gleichbedeutende *Kontraposition*
"Wenn nicht $H(X)$, dann nicht $x \in M$" beweisen kann.

c) Beachte, dass eine Umkehrung eines Satzes oft *indirekt* bewiesen wird!
Dabei kann man manchmal der Beweisidee für den Ausgangssatz folgen oder man kann den Ausgangssatz als Beweismittel verwenden.

(5) Kommst du auf diese Weise nicht ans Ziel, dann übersetze die Aufgabe in die Sprache der *Koordinatengeometrie* !
(Du erhältst dann den geometrischen Ort zunächst in der Form $F(x;y) = 0$.)

(I) , (II) ist eine Konkretisierung von *Impulsblock (4)*; es wird einerseits der Übergang zur zugehörigen Beweisaufgabe empfohlen, andererseits wird bei der Suche nach einer Vermutung das Betrachten von Spezialfällen und Grenzfällen angeraten.

Regeln zum Lösen von geometrischen Konstruktionsaufgaben

[*Hinweis:* Geometrische Konstruktionsaufgaben sind spezielle Bestimmungsaufgaben. Zu ermitteln sind alle Figuren, die die gegebenen Bedingungen erfüllen. Genauer gesagt: Zu ermitteln ist eine (Konstruktionsbeschreibung genannte) algorithmische Vorschrift, die es gestattet, aus den Daten genau diejenigen (untereinander nicht kongruenten) Figuren zu konstruieren, die die gestellten Bedingungen erfüllen.
Solche Aufgaben lassen sich stets so umformulieren, dass nur Punkte nebst Bedingungen gegeben und nur Punkte gesucht sind, und man daher die Methode der geometrischen Örter und die Methode der Hilfselemente anwenden kann. Der Suche nach Hilfsgrößen entspricht hier die Suche nach Hilfspunkten.
Man kann solche Aufgaben auch so umformulieren, dass nur Streckenlängen nebst Bedingungen gegeben und nur Streckenlängen gesucht sind, und man daher die algebraische Methode anwenden kann. Die hierbei erhaltenen Terme sind (elementar) konstruierbar genau dann, wenn sie als Operationszeichen nur $+, -, \cdot, :$ und Quadratwurzelzeichen enthalten.]

(1) Zeichne eine *Planfigur* !
Notiere die gegebenen *Bedingungen*, in denen die *Daten* vorkommen!

(3.1) Wende die **Methode der geometrischen Örter** an !

- Reduziere die Aufgabe auf die Konstruktion eines (oder mehrerer) Punktes X! (Das ist oft auf mehrere Weisen möglich.)
- Bilde aus den gegebenen Bedingungen zwei Aussageformen!
- *Ermittle die* den Aussageformen *zugehörigen beiden* Erfüllungsmengen (*geometrischen Örter*) !
- Bilde den *Durchschnitt* dieser beiden geometrischen Örter !

Kommst du so nicht sofort ans Ziel, dann wende die **Methode der Hilfselemente** an !

(2.1) *Welche Hilfspunkte* (Hilfsfiguren o.ä.) *lassen sich aus den gegebenen Bedingungen* unmittelbar *konstruieren?*
Begründe (d.h. nenne die beiden geometrischen Örter, die den Hilfspunkt bestimmen) !

(2.2) *Aus welchen Hilfspunkten* (Hilfsfiguren o.ä.) *ließe sich der gesuchte Punkt unmittelbar konstruieren* ?
Sind für jeden dieser Hilfspunkte je zwei geometrische Örter bekannt?

Wende abwechselnd die Strategie des Vorwärts- und des Rückwärtsarbeitens an, bis du einen Weg von den gegebenen Punkten über die gefundenen Hilfspunkte zu den gesuchten Punkten gefunden hast !

Als *Hilfsfiguren* eignen sich oft *Teildreiecke* (Teilfiguren), zur gesuchten Figur *ähnliche Figuren* oder Figuren, über die man viel aussagen kann (z.B. Parallelogramme).

Um brauchbare Hilfselemente zu finden, muss man oft *einschlägige geometrische Sätze verwenden*, d.h. charakteristische Eigenschaften der zu konstruierenden Figur beachten.
Auch die *Anwendung von Abbildungen* (von Bewegungen, Ähnlichkeitsabbildungen, Spiegelungen am Kreis usw.) kann hierbei helfen.

(3) Bei schwierigeren Konstruktionsaufgaben muss man die für die Konstruktion der Hilfspunkte oder der gesuchten Punkte benötigten *Beziehungen* erst *entdecken und herleiten*, was zu einer

(4.2) *Beweisaufgabe als Hilfsaufgabe* führen kann. Es kann auch vorkommen, dass du zu einer gegebenen oder gefundenen Bedingung den zugehörigen geometrischen Ort nicht kennst. Dann muss du dich der zugehörigen *Ortsaufgabe als Hilfsaufgabe* zuwenden. Überzeuge dich aber vorher, dass du auf diese Weise wirklich zu einem Lösungsweg für die Konstruktionsaufgabe gelangst!

(5) Wende die **algebraische Methode** an !

- Suche eine Streckenlänge, die eine *"hinreichende" Hilfsgröße* ist, d.h. mit deren Hilfe sich die gesuchte Figur konstruieren ließe.

- *Drücke* diese *Hilfsgröße rechnerisch durch die Daten aus* !

Erweist sich der so gefundene Term als konstruierbar, dann hast du einen Lösungsweg gefunden.

Regeln zum Lösen von zahlentheoretischen Beweisaufgaben

(1) Schreibe die *Behauptung* und die *Voraussetzungen* des Satzes unter Verwendung einer geschickten Bezeichnungsweise heraus!
(*Variable* einführen, Aussageformen verwenden.)
Mache dir den Inhalt des Satzes klar, indem du einige *konkrete Zahlenbeispiele* betrachtest!

(5) Lohnt es, die Aufgabe in die Sprache der *Kongruenzen* zu übersetzen?

(2.1) *Vorwärtsarbeiten* !
Wandle Teilbarkeitsaussagen durch Anwendung der Definition von $a|b$ in *Gleichungen* um!
Führt eine *vollständige* *Fallunterscheidung* zum Ziel?
Ist ein *Beweis durch vollständige Induktion* erfolgversprechend?

(2.2) *Rückwärtsarbeiten* !
(Definitionen sowie Sätze mit gleicher Behauptung liefern *hinreichende Feststellungen*.)

(4.2) Beim Rückwärts- oder Vorwärtsarbeiten stößt man bisweilen auf *Hilfsaufgaben* bzw. entdeckt *Hilfssätze*, mit deren Hilfe man ans Ziel gelangen kann.

(4) Manchmal lohnt es, die Beweisaufgabe *in eine Bestimmungsaufgabe umzuwandeln* und die zugehörigen Regeln zu verwenden.

Regeln zum Lösen von zahlentheoretischen Bestimmungsaufgaben

[*Hinweis:* Zahlentheoretische Bestimmungsaufgaben lassen sich in der Regel auf folgende Form bringen:
"Ermittle die Menge aller (natürlichen oder ganzen) Zahlen, die folgende Bedingungen (Aussageformen) erfüllen: .... " .
Im Gegensatz etwa zu geometrischen Bestimmungsaufgaben oder zu Sach- und Anwendungsaufgaben ist hier der Aufgabenstellung nicht zu entnehmen, dass es genau eine Lösung gibt, sondern die gesuchte Erfüllungsmenge kann leer sein, endlich oder unendlich viele Elemente enthalten.]

(1) Führe *Variable* ein und schreibe die *gegebenen Bedingungen* unter Verwendung günstiger Bezeichnungen als Aussageformen heraus!

(3.1) Ermittle zu jeder Bedingung die Erfüllungsmenge!
Bilde den *Durchschnitt dieser Erfüllungsmengen* !

(3.1.1) Jede endliche Erfüllungsmenge lässt sich im Prinzip durch *"systematisches Erfassen aller möglichen Fälle"* ermitteln.
Lege hierzu übersichtliche *Tabellen* an!

- Oft ist die *Reihenfolge wichtig*, in der man die einzelnen Bedingungen untersucht.
- Beginne mit der Bedingung, die von möglichst wenigen Elementen erfüllt wird!
  Aus dieser Menge kann man dann systematisch alle *Elemente ausschließen, die* eine der restlichen *Bedingungen nicht erfüllen.*
  Hierbei beginne man mit der Bedingung, die sich am leichtesten nachprüfen lässt.

(3.2) *Forme* die gegebenen Bedingungen zweckmäßig *um, ziehe Folgerungen* aus ihnen, und *ermittle nach* solchen *Vereinfachungen die* gesuchte *Erfüllungsmenge* !
[Oft wird (3.1) und (3.2) kombiniert angewendet. In beiden Fällen liegt eine spezielle Form des Vorwärtsarbeitens vor.]

(4) Versuche, durch Betrachten einiger *konkreter Fälle*, durch Probieren o.ä. zu einer *Vermutung* über die gesuchte Erfüllungsmenge zu gelangen, und *löse die zugehörige Beweisaufgabe* !

(4.1) Suche nach *bereits gelösten Aufgaben*, auf die sich die gestellte Aufgabe *zurückführen* lässt!
Formuliere *Hilfsaufgaben*, deren Lösung das Lösen der gestellten Aufgabe ermöglichen würde!

(4.2) Wende dich zunächst einer *einfacheren verwandten Aufgabe* zu!
Beschäftige dich zunächst mit einem *Spezialfall* !

(5) Lohnt es, das *Rechnen mit Kongruenzen* als Hilfsmittel einzusetzen?

Regeln zum Lösen von logisch-kombinatorischen Aufgaben

[*Hinweis:* Wir betrachten hier nur folgende logisch-kombinatorischen Aufgaben:
Gegeben sind Aussagen über Zuordnungen zwischen oder über Reihenfolgen von Elementen nebst Informationen über die Wahrheitswerte dieser Aussagen.
Zu ermitteln sind alle Zuordnungen oder Reihenfolgen, die sämtliche gegebenen Bedingungen erfüllen.]

(1) Führe geeignete Bezeichnungen ein, wähle eine *zweckmäßige Symbolik*, und *halte die gegebenen Aussagen* (Bedingungen) *in übersichtlicher Form fest* !
Verwende *Tabellen*, um Zuordnungen oder Reihenfolgen übersichtlich festzuhalten.

(2.1) *Was lässt sich aus den gegebenen Aussagen folgern? Begründung!*

(3.2) Welche Aussage dürfte *die meiste Information* liefern?
Beginne mit dieser Aussage!
- Halte die gefolgerten Aussagen in der angefertigten Tabelle symbolisch fest; ziehe weitere Schlussfolgerungen, und fülle die Tabelle schrittweise aus !
- Sind die Wahrheitswerte der gegebenen Aussagen noch zu ermitteln, dann suche zunächst nach in sich widerspruchsvollen oder nach untereinander unverträglichen Aussagen!
- Wenn du nicht weiterkommst, dann prüfe nach, ob du schon alle gegebenen Informationen voll ausgeschöpft hast!

(2.2) *Betrachte das Gesuchte! Woraus und auf welche Weise ließe es sich ableiten (ermitteln)? Begründung!*
- Oft ist die Kenntnis der *Wahrheitswerte* der gegebenen Aussagen hinreichend für die Lösung der Aufgabe.
  Wie lassen sich diese Wahrheitswerte ermitteln?

(3.1.1) *Erfasse systematisch alle möglichen Fälle* (Zuordnungen, Reihenfolgen, Wahrheitswertverteilungen) und *schließe systematisch* alle *Fälle aus*, die nicht eintreten können!
- Welche Fälle lassen sich auf Grund welcher Aussage sofort ausschließen?
  Überprüfe die restlichen Fälle anhand der gegebenen Aussagen!
- Verwende *Tabellen*, um die gewonnenen Ergebnisse übersichtlich festzuhalten!

Regeln zum Lösen von Beweisaufgaben aus dem Gebiet "Gleichungen/Ungleichungen"

(1) Die abzuleitende Gl/Ugl ist die *Behauptung* des zu beweisenden Satzes.

Wie lauten seine *Voraussetzungen*?

- Gilt die Gl/Ugl für alle oder nur für einen Teilbereich der reellen Zahlen oder werden noch weitere einschränkende Voraussetzungen getroffen?
- Mache dir den Inhalt des Satzes anhand einiger *konkreter Zahlenbeispiele* klar!

Wähle auch Zahlen, die die Voraussetzung nicht erfüllen!

(2.2.1) *Folgern aus der Behauptung: Forme die abzuleitende Gl/Ugl* so lange *um*, bis du zu einer allgemeingültigen Gl/Ugl gelangst oder zu einer Gl/Ugl, die sich aus den Voraussetzungen ableiten lässt.

- Untersuche, ob sich der so gefundene Weg auch von den Voraussetzungen zur Behauptung beschreiten lässt oder ob dabei noch bestimmte Modifikationen nötig sind!

(2.2) *Betrachte die abzuleitende Ungleichung!*

- Weist ihre Gestalt auf eine bekannte *"Standardungleichung"* (z.B. die Ugl über das arithmetische, das geometrische, das harmonische und das quadratische Mittel) hin, die als *Hilfsmittel* einsetzbar wäre?

  Forme zweckmäßig um, so dass dies möglich wird!
- Lassen sich die vorkommenden *Terme* günstig (nach oben oder nach unten) *abschätzen* , so dass man auf diese Weise zu einer leichter ableitbaren Ugl gelangen kann?

(2.1) *Betrachte die Voraussetzungen! Was lässt sich aus ihnen folgern?*

- Deuten sie auf die Anwendbarkeit gewisser *Standardungleichungen* hin?
- Lässt sich eine der Variablen durch die anderen ausdrücken, so dass sich in der abzuleitenden Gl/Ugl die *Anzahl der Variablen verringern* lässt?

(4.1) Gelingt dir die Ableitung der Gl/Ugl nicht, dann beschäftige dich zunächst mit einem *Spezialfall* . Vielleicht führt das zu einer brauchbaren Lösungsidee.

(4.2) Bei der Anwendung von (2.2.1) oder (2.2) stößt man bisweilen auf *Hilfsaufgaben.*

Beschäftige dich erst dann mit solchen Aufgaben, wenn du dich überzeugt hast, dass ihre Lösung die Lösung der Ausgangsaufgabe ermöglicht.

(5) Manchmal ist es zweckmäßig, die *graphische Lösungsmethode* einzusetzen.

Untersuche die zu vorkommenden Termen gehörenden *Funktionen und deren Graphen* vor allem in Hinblick auf Extremwerte; dies kann beim Abschätzen von Termen helfen.

Regeln zum Lösen von Bestimmungsaufgaben aus dem Gebiet "Gleichungen/Ungleichungen"

(2.1) *Betrachte die gegebenen Gl/Ugl* ; analysiere die vorkommenden Terme!

(3.2) - Ermittle den *Lösungsgrundbereich* der Gl/Ugl (als Durchschnitt der Definitionsbereiche aller vorkommenden Terme)!

- Versuche durch *Untersuchung der Wertebereiche der* vorkommenden *Terme* und durch andere *inhaltliche Überlegungen* Informationen über die gesuchte Lösungsmenge zu gewinnen!
- Untersuche bei quadratischen Gl/Ugl stets zunächst die *Diskriminante*! Welche Information liefert sie über die gesuchte Lösungsmenge?
- *Ganzzahlige Lösungen* von Gleichungen n-ten Grades lassen sich mit Hilfe des Wurzelsatzes von Vieta *erraten.* Durch Abspalten des zu einer erratenen Lösung gehörenden Linearfaktors lässt sich der *Grad der Gleichung erniedrigen.*

(5) *Transformiere* die Aufgabe in den Bereich "Funktionen und ihre Graphen", d.h. versuche *auf graphischem Wege Informationen über die Lösungsmenge* zu *gewinnen!*

- Forme die Gl/Ugl so um, dass auf beiden Seiten Terme stehen, deren zugehörige Graphen du relativ einfach zeichnen kannst. Kennzeichne charakteristische Punkte und Asymptoten dieser Graphen!
- Lässt sich auf diesem Wege die Lösungsmenge genau ermitteln , oder gewinnt man so nur Informationen über die Anzahl und die näherungsweise Lage der Lösungen?

(2.1) Wenn du auf diese Weise die Lösungsmenge nicht genau ermitteln kannst, dann *forme die Gl/Ugl* so lange (wenn möglich *äquivalent*) *um*, bis du zu einer Gl/Ugl gelangst, deren Lösungsmenge sich unmittelbar ablesen lässt. Versuche auch, *durch* geschickte *Substitutionen die Gl/Ugl* zu *vereinfachen* !

- Versuche die Gl/Ugl so umzuformen, dass *auf der einen Seite ein Produkt, auf der anderen Seite Null* steht ! Denn dann kannst du (mit Hilfe eines bekannten Satzes über Produkte) *zu einer Alternative von einfacheren Gl/Ugl übergehen.* Neben dem Ausklammern gemeinsamer Faktoren verwende vor allem die binomischen Formeln, um Summen in Faktoren zu zerlegen.
- Entsteht beim Umformen eine *Alternative bzw. eine Konjunktion* von Gl/Ugln, dann erhält man die gesuchte Lösungsmenge als *Vereinigung bzw. Durchschnitt* der betreffenden Lösungsmengen.

Wenn du nicht immer nur äquivalent umgeformt hast, dann ist ein *Existenznachweis* in Form einer *Probe* nötig, d.h. du musst noch nachprüfen, ob alle Lösungen der umgeformten Gleichung auch wirklich Lösungen der Ausgangsgleichung sind. (Bei Ungleichungen ist dieses Vorgehen unpraktikabel.)

Regeln zum Ermitteln des Ansatzes bei Sach- und Anwendungsaufgaben

[*Hinweis:* Das Lösen von Sach- und Anwendungsaufgaben (aus Physik, Technik, Ökonomie usw.) erfolgt im Prinzip stets in 3 Schritten:
1. Übersetzung der Aufgabe in die Sprache einer mathematischen Disziplin; (Ansatz finden);
2. Lösen der mathematischen Aufgabe (meist Gleichung oder Gleichungssystem);
3. "Rückübersetzung", d.h. Deutung des mathematischen Resultats; Formulieren des Antwortsatzes.
Wir betrachten hier nur den 1.Schritt, der einer Anwendung der Regel (5) entspricht. Der 2.Schritt entspricht im allgemeinen der Anwendung von Regel (3.2) .]

(1) Was ist *gegeben* , was ist *gesucht* ? Führe *Variable* ein!

- Welche *allgemeinen Beziehungen* (Formeln, Gesetze) spielen beim Lösen der Aufgabe eine Rolle?

  Welche *speziellen Beziehungen* sind dem Aufgabentext unmittelbar zu entnehmen?
- Fertige zur Veranschaulichung eine *Skizze* an!
- Fertige eine *Tabelle* an!

  Die in der einschlägigen allgemeinen Beziehung vorkommenden Größen liefern die Spalteneingänge; passend gewählte Zeileneingänge müssen dem jeweiligen speziellen Sachverhalt entnommen werden.

  Trage die gegebenen Größen in die Tabelle ein! Kennzeichne die Felder, in denen die gesuchten Größen stehen!

(2.1) *Was lässt sich aus dem Gegebenen unmittelbar berechnen? Begründung!*
Mit welchen *Hilfsmitteln* (Formeln, Sätzen o.ä.) ist dies möglich?

(2.2) *Aus welchen Größen ließe sich das Gesuchte unmittelbar berechnen?*
Verwende hierzu Formeln, in denen das Gesuchte vorkommt!

Versuche, durch *Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten* einen Weg vom Gegebenen über Hilfsgrößen zum Gesuchten zu finden und so eine Gleichung zu gewinnen, in der neben der gesuchten Größe nur gegebene Größen vorkommen.

(3) *Suche nach Gleichungen* (Beziehungen) *zwischen* den *gegebenen,* den *gesuchten* und passend gewählten *Hilfsgrößen* !
Eliminiere die Hilfsgrößen!

- Welche Beziehungen kannst du der *Skizze* entnehmen?
- Fülle die Felder der *Tabelle* schrittweise aus, indem du die gegebenen oder gefundene Beziehungen verwendest! Dabei kannst du auch von einer Hilfsgröße ausgehen.
- Sind alle Felder der Tabelle gefüllt und wird nur eine Größe gesucht, dann gibt es in der Regel noch eine Beziehung, die beim Ausfüllen der Tabelle nicht verwendet wurde. Diese Beziehung liefert die *Ansatzgleichung*.