

Jede Antwort muss begründet werden. Abgabe der Serie bis spätestens 15.11.2026 an ricky.geiges[at]web.de oder Ricky Geiges, Friedrich Ebert Straße 84, 04109 Leipzig.

Aufgabe 1 (Teiler)

Für eine natürliche Zahl $n > 1$ sei $T_n := \{t_1, t_2, \dots, t_k\}$ die Menge aller Teiler von n mit $1 = t_1 < t_2 < \dots < t_k = n$.

- a) Berechne k und t_2 für $n = 1001$. (1 Punkt)
- b) Zeige, dass t_2 immer eine Primzahl ist. (2 Punkte)
- c) Beweise, dass k genau dann ungerade ist, wenn n eine Quadratzahl ist. (2 Punkte)

Aufgabe 2 (Zwei Beweismethoden)

Für eine positive ganze Zahl n betrachten wir den Term $n^5 - n$.

- a) Faktorisiere $n^5 - n$ so weit wie möglich. (1 Punkt)

Zeige nun, dass $n^5 - n$ für alle n durch 5 teilbar ist, indem du...

- b) ... einen direkten Beweis durchführst. (2 Punkte)
- c) ... die Vollständige Induktion nutzt. (3 Punkte)

Aufgabe 3 (Summe ungerader Zahlen)

Zeige, dass die Summe der ersten n ungeraden natürlichen Zahlen n^2 ergibt.

(4 Punkte)

Aufgabe 4 (Ungleichung)

Für $n \in \mathbb{N}$ soll die Ungleichung

(i) $n\sqrt{n} > n + \sqrt{n}$

untersucht werden.

- a) Ermittle die kleinste natürliche Zahl n_0 , für die die Ungleichung (i) gilt. (1 Punkt)
- b) Zeige die Ungleichung (i) für alle $n \geq n_0$. (5 Punkte)

Aufgabe 5 (Geraden in der Ebene)

Zeige, dass man eine Ebene durch Einzeichnen von n Geraden in höchstens $\frac{n^2+n+2}{2}$ Gebiete zerlegen kann.

(5 Punkte)

Aufgabe 6 (Auswahl)

Anna wählt aus der Menge der natürlichen Zahlen zufällig sieben Zahlen aus. Zeige, dass sie darunter immer vier Zahlen finden kann, sodass deren Summe durch 4 teilbar ist.

(4 Punkte)